Extension de morphismes

Béranger Seguin

Soit une suite exacte courte de groupes :

$$1 \to A \to B \to C \to 1$$

dans laquelle on voit la flèche $A \to B$ comme une inclusion et on note $\pi : B \to C$ la surjection. On suppose donné un morphisme de groupes $\varphi : A \to G$, et on pose la question de l'existence d'un morphisme $\tilde{\varphi} : B \to G$ étendant φ. Si $\tilde{\varphi}$ existe, on a pour $a \in A$ et $b \in B$:

$$\varphi\big(a^b\big) = \tilde{\varphi}\big(a^b\big) = \varphi(a)^{\tilde{\varphi}(b)}.$$

En particulier, une condition nécessaire pour l'existence de $\tilde{\varphi}$ est que deux éléments de A conjugués dans B (par un élément $b \in B$) aient des images par φ conjuguées dans G (par un élément de G ne dépendant que de B). Pour être plus précis, on se place dans la situation où la suite exacte est scindée par une section (morphique) $s : C \to B$, telle que $\pi \circ s = \mathrm{id}$. Alors, C agit « pour de vrai » sur A via l'action de conjugaison de $s(c)$ (pour un élément $c \in C$) sur un élément $a \in A$. En conséquence, C agit aussi sur l'ensemble des morphismes $\varphi : A \to G$, via la formule $(c.\varphi)(a) = \varphi\big(a^{s(c)}\big)$.

Supposons à nouveau que l'extension $\tilde{\varphi}$ existe. Alors :

$$(c.\varphi)(a) = \varphi\big(a^{s(c)}\big) = \tilde{\varphi}\big(a^{s(c)}\big) = \varphi(a)^{\tilde{\varphi}(s(c))}.$$

Donc il existe un morphisme de groupes $\rho : C \to G$ (en l'occurrence $\tilde{\varphi} \circ s$) tel que $c.\varphi = \varphi^{\rho(c)}$. De plus, ρ détermine uniquement $\tilde{\varphi}$ puisque :

$$\tilde{\varphi}(b) = \tilde{\varphi}\left(\underbrace{bs(\pi(b))^{-1}}_{\in A} s(\pi(b))\right) = \varphi\Big(bs(\pi(b))^{-1}\Big)\rho(\pi(b)).$$

Réciproquement, si un morphisme de groupes $\rho : C \to G$ tel que $c.\varphi = \varphi^{\rho(c)}$ existe, alors on définit une application $\tilde{\varphi} : B \to G$ en posant :

$$\tilde{\varphi}(b) = \varphi\Big(bs(\pi(b))^{-1}\Big)\rho(\pi(b)).$$

Cette application étend φ puisque $\pi(b) = 1$ lorsque $b \in A$. Il s'agit d'un morphisme de groupes : en effet, si $b, b' \in B$, on a :

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}(b)\tilde{\varphi}(b') &= \varphi\Big(bs(\pi(b))^{-1}\Big)\rho(\pi(b))\varphi\Big(b's(\pi(b'))^{-1}\Big)\rho(\pi(b')) \\
&= \varphi\Big(bs(\pi(b))^{-1}\Big)\varphi\Big(b's(\pi(b'))^{-1}\Big)^{\rho(\pi(b))}\rho(\pi(b))\rho(\pi(b')) \\
&= \varphi\Big(bs(\pi(b))^{-1}\Big)(\pi(b).\varphi)\Big(b's(\pi(b'))^{-1}\Big)\rho(\pi(bb')) \\
&= \varphi\Big(bs(\pi(b))^{-1}\Big)\varphi\left(\Big(b's(\pi(b'))^{-1}\Big)^{s(\pi(b))}\right)\rho(\pi(bb')) \\
&= \varphi\Big(bs(\pi(b))^{-1}s(\pi(b))b's(\pi(b'))^{-1}s(\pi(b))^{-1}\Big)\rho(\pi(bb')) \\
&= \varphi\Big(bb's(\pi(bb'))^{-1}\Big)\rho(\pi(bb')) \\
&= \tilde{\varphi}(bb').
\end{aligned}$$

On a donc obtenu une équivalence. Demander l'existence du morphisme ρ n'est pas équivalent au fait de demander que φ soit invariant à conjugaison près sous l'action de C : sous cette dernière hypothèse, on n'obtient qu'une application ρ, et non un morphisme.

Remarquons toutefois la chose suivante : supposons que φ est surjective et que G se rétracte sur son centre, c'est-à-dire qu'il existe un morphisme $r : G \to Z(G)$ dont la restriction à $Z(G)$ soit l'identité. Alors, $G \sim Z(G) \times \mathrm{Inn}(G)$. Supposons qu'il existe une application $\rho : C \to G$ telle que $c.\varphi = \varphi^{\rho(c)}$. On la compose avec la projection $G \to \mathrm{Inn}(G)$: c'est alors un morphisme. En effet, l'égalité $\varphi^{\rho(c)\rho(c')} = (cc').\rho = \varphi^{\rho(cc')}$ et la surjectivité de φ entraînent que $\rho(c)\rho(c')$ et $\rho(cc')$ ont même image dans $\mathrm{Inn}(G)$. En composant avec le morphisme $\mathrm{Inn}(G) \to G$ déduit de la décomposition de G en produit direct, on obtient un morphisme $\rho' : C \to G$ tel que $c.\varphi = \varphi^{\rho'}(c)$.

On a décrit une bijection entre les deux ensembles suivants :

$$\begin{array}{ccc} \left\{\begin{array}{c}\text{extensions } \tilde{\varphi} \\ \text{de } \varphi \text{ à } B\end{array}\right\} & \sim & \left\{\begin{array}{c}\text{morphismes } \rho{:}C{\to}G \\ \text{tels que } c.\varphi{=}\varphi^{\rho(c)}\end{array}\right\} \\ \tilde{\varphi} & \mapsto & \tilde{\varphi} \circ s \end{array}$$

Remarquons que si ρ et ρ' sont deux morphismes $C \to G$ tels que $c.\varphi = \varphi^{\rho(c)} = \varphi^{\rho'(c)}$, alors $\rho'\rho^{-1}$ est à valeurs dans le centralisateur Z de l'image de φ. Ainsi, un morphisme ρ étant connu, les autres peuvent être paramétrés par les applications $\mu : C \to Z$ telles que $\mu\rho$ soit un morphisme. Un cas particulièrement intéressant est celui de $\rho = 1$, c'est-à-dire que φ est invariant sous l'action de C $(c.\varphi = \varphi)$. Alors, les extensions de φ à B sont en bijection avec les morphismes $\mu : C \to Z$. Il y a en particulier une bijection canonique (pour $\mu = 1$):

$$\begin{array}{ccc} \left\{\begin{array}{c}\text{morphismes } \varphi{:}A{\to}G \\ \text{invariants sous l'action de } C\end{array}\right\} & \sim & \left\{\begin{array}{c}\text{morphismes } \tilde{\varphi}{:}B{\to}G \\ \text{tels que } \tilde{\varphi}{\circ}s{=}\ \mathrm{id}\end{array}\right\} \\ \varphi & \mapsto & \left[b \mapsto \varphi\Big(bs(\pi(b))^{-1}\Big)\right] \\ \tilde{\varphi}|_A & \leftarrow\!\shortmid & \tilde{\varphi} \end{array}$$