

$$D_{\bar{\rho}}(R) = \left\{ \begin{array}{c} \text{[Diagram of a deformation space]} \\ \text{[Commutative diagram: } G \xrightarrow{\rho} GL_n(k) \text{ and } G \xrightarrow{\rho} GL_n(R) \text{ with a vertical arrow } GL_n(k) \rightarrow GL_n(R) \text{]} \end{array} \right\} \simeq \text{Hom}(\mathfrak{A}_{\bar{\rho}}, R)$$

LES DÉFORMATIONS DE REPRÉSENTATIONS GALOISIENNES

Un voyage merveilleux au cœur de l'arithmétique

BÉRANGER SEGUIN

Mémoire de M2 sous la direction de M. **XAVIER CARUSO**
(Institut Mathématique de Bordeaux)

Soutenu le 24 septembre 2019 à Paris (rapportrice : **ARIANE**
MÉZARD, note obtenue : 17/20).

Année universitaire 2018–2019

Table des matières

1	Généralités	4
1.1	Introduction	4
1.1.1	Objectifs de ce mémoire	4
1.1.2	Fixons quelques notations et définitions	4
1.1.3	Présentation brève des vecteurs de WITT	8
1.2	Les déformations	8
1.2.1	Histoire et motivation	8
1.2.2	Le foncteur des déformations	10
1.2.3	(pro)-Représentabilité du foncteur	13
1.3	Les critères de GROTHENDIECK et SCHLESSINGER	14
1.3.1	Espaces (co)tangents et nombres duaux	14
1.3.2	Critère de GROTHENDIECK	18
1.3.3	Critère de SCHLESSINGER	19
1.4	Existence d'un anneau de déformation (uni)versel	23
1.4.1	Preuve de l'existence d'une déformation (uni)verselle	24
1.4.2	Cas des représentations galoisiennes	31
1.5	Preuve du critère de SCHLESSINGER	31
1.5.1	Un peu de théorie des foncteurs $\mathcal{C}^0 \rightarrow \mathbf{Set}$	31
1.5.2	Existence d'une enveloppe	33
1.5.3	Condition nécessaire	38
1.6	Généralisations diverses	39
1.6.1	Restriction de la catégorie aux Λ -algèbres	39
1.6.2	Version relative	40
1.6.3	Déformations cadrées	41
2	Exemples et applications	42
2.1	Calculs d'anneaux de déformation	42
2.1.1	Cas uni-dimensionnel	42
2.1.2	Quelques pas en direction du cas général	44
2.1.3	Changement de groupe	53
2.2	Typologie des représentations galoisiennes	54
2.2.1	Conditions sur le déterminant	56

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	3
2.2.2 Conditions sur la ramification	56
2.2.3 Décomposition et représentations de HODGE–TATE	56
2.2.4 Représentations de DE RHAM	58
2.2.5 Représentations cristallines	62
2.2.6 Représentations semi-stables	62
2.2.7 Représentations issues de la géométrie	63
2.2.8 Définitions dans le cas global	66
2.2.9 Résultats sur les anneaux de déformation associés	67
3 Synthèse	69
3.1 Un mot sur le grand théorème de FERMAT	69
3.2 La conjecture de FONTAINE–MAZUR	71
3.3 Conclusion	72

Abstract

Une des principales préoccupations de l'arithmétique moderne est de comprendre aussi bien que possible le groupe de GALOIS absolu de \mathbb{Q} , car il « classifie » les extensions algébriques de \mathbb{Q} et est donc d'une importance cruciale pour la résolution des équations dans \mathbb{Q} . Cela passe par l'étude de « l'ombre » qu'il laisse en plusieurs endroits :

- Sur ses sous-groupes : on étudiera alors $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}} | K)$ où K est un corps de nombres quelconque ;
- Sur les complétions de \mathbb{Q} : on étudiera alors $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p | K)$ où K est un corps local p -adique ;
- Sur ses représentations : on étudiera alors les représentations de $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}} | \mathbb{Q})$ (par exemple) ;
- ...

Cette démarche nous amènera logiquement à considérer les représentations galoisiennes, puis leurs déformations. Cette approche a montré sa force, notamment à l'occasion de la preuve par WILES du grand théorème de FERMAT et d'une partie importante de la conjecture de TANIYAMA–SHIMURA–WEIL sur le lien entre les courbes elliptiques et les formes modulaires. On suivra plusieurs références, mais principalement un cours de GOUVÊA nommé *Deformations of Galois Representations* ([Gou91]) pour les généralités et l'ouvrage *An Introduction to the Theory of p -adic Representations* de LAURENT BERGER ([Ber04]) pour les détails relatifs à la théorie de HODGE p -adique.

Chapitre 1

Généralités

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux définitions de base et aux premières propriétés du foncteur des déformations.

1.1 Introduction

1.1.1 Objectifs de ce mémoire

L'objectif de ce travail est de faire un tour d'horizon de la théorie des déformations des représentations galoisiennes, avec un niveau de détail variable selon les aspects abordés : certains aspects et cas simples seront bien détaillés, d'autres seront surtout évoqués avec des renvois vers des références plus précises.

Dans le premier chapitre, on exposera des généralités sur les déformations des représentations galoisiennes, notamment les raisons et les conséquences de l'existence des anneaux de déformation universels.

Dans le second chapitre, on parlera davantage de la structure des anneaux de déformation universels et de leur description ; on évoquera aussi des notions de théorie de HODGE p -adique pour raffiner notre compréhension de la structure des représentations galoisiennes.

Dans un dernier chapitre court, on tentera de faire une synthèse de ce travail en mentionnant rapidement les avancées importantes du domaine.

On s'efforcera aussi, tout au long de ce mémoire, de donner des motivations aux notions, des exemples des objets étudiés, des descriptions intuitives du lien entre eux, et des cas d'applications des théorèmes démontrés.

1.1.2 Fixons quelques notations et définitions

Autant que possible, nous utiliserons des notations standards, en essayant d'unifier un peu les notations des différentes références dont on tirera les énoncés.

Dans tout ce mémoire, on fixe un nombre premier p et un corps k de caractéristique p .

Dans l'idée, on peut prendre $k = \mathbb{F}_p$. On considérera deux types de corps parfaits K :

- K pourra être un corps local l -adique (une extension finie de \mathbb{Q}_l , avec l un nombre premier égal ou non à p), avec $\bar{K} = \bar{\mathbb{Q}}_l$, $\mathbb{C}_K = \mathbb{C}_l$. Dans ce cas, on notera \mathcal{O}_K

l'anneau des entiers de K (les éléments de valuation positive pour l'unique extension de la valuation de \mathbb{Q}_l à K). Pour des rappels sur les définitions de ces objets, on peut consulter [Ser62].

On notera alors G_K le groupe de GALOIS absolu de K , muni de sa topologie profinie naturelle (héritée des topologies discrètes), c'est-à-dire :

$$G_K = \text{Gal}(\bar{K} | K) = \varprojlim_{K'|K \text{ extension finie}} \text{Gal}(K' | K)$$

Il y aura rarement lieu ici de distinguer les cas $l = p$ et $l \neq p$, mais ils donnent lieu à deux théories des représentations galoisiennes différentes.

— K pourra être un corps de nombres (une extension finie de \mathbb{Q}), avec $\bar{K} = \bar{\mathbb{Q}}$ et $\mathbb{C}_K = \mathbb{C}$. Dans ce cas, on notera \mathcal{O}_K l'anneau des entiers de K (les éléments qui sont racines d'un polynôme unitaire à coefficients dans \mathbb{Z}).

Si S est un ensemble fini de places (classes d'équivalence de valeurs absolues) de \mathcal{O}_K , on définit alors :

$$G_{K,S} = \varprojlim_{\substack{K'|K \text{ extension finie} \\ \text{non-ramifiée hors de } S}} \text{Gal}(K' | K)$$

où $K' | K$ est dite non-ramifiée en une place dans les conditions suivantes :

- Si la place est non-archimédienne, elle correspond à un idéal premier p de \mathcal{O}_K . Alors, l'extension est non-ramifiée lorsque l'idéal $p\mathcal{O}_{K'}$ de $\mathcal{O}_{K'}$ s'écrit comme produit d'idéaux premiers distincts de $\mathcal{O}_{K'}$ (c'est-à-dire qu'aucune puissance n'est supérieure ou égale à 2 dans sa décomposition).
- Si la place est archimédienne, elle correspond à un plongement de K dans \mathbb{C} (c'est la restriction de la norme complexe). Alors, l'extension est non-ramifiée en cette place si ce plongement n'est pas d'image réelle, ou (dans le cas contraire) si tout plongement de K' dans \mathbb{C} qui étend ce plongement est aussi d'image réelle.

Les groupes G_K et $G_{K,S}$ sont des groupes profinis. Ce sont leurs représentations qu'on étudiera tout au long de ce travail. Pour mieux les cerner, on introduit encore la condition de finitude suivante :

Définition 1 (condition de finitude Φ_p). Un groupe profini G vérifie la condition Φ_p lorsque pour tout sous-groupe ouvert G_0 de G , l'ensemble des morphismes continus $G_0 \rightarrow \mathbb{F}_p$ est fini.

Cette condition nous permettra quelquefois d'assurer la finitude de certains ensembles, et son introduction ici est motivée par cette propriété :

Propriété 2. La condition Φ_p est satisfaite dans les deux cas suivants :

- Si K est un corps de nombres, $G_{K,S}$ satisfait la condition Φ_p ;

— Si K est un corps local l -adique, G_K satisfait la condition Φ_p .

Preuve. Dans les références, les preuves utilisent le théorème de HERMITE–MINKOWSKI sur la finitude du nombre d'extension non-ramifiées hors de S de degré fixé. On propose ici une preuve alternative, reposant entièrement sur la théorie du corps de classes :

— **Dans le premier cas (global) :** Soit un sous-groupe ouvert G' de $G_{K,S}$. La correspondance de GALOIS nous apprend que ce sous-groupe est lui-même le groupe $G_{K',S'}$ associé à $K' = (\bar{K})^{G'}$, et où S' est la liste des idéaux premiers de $\mathcal{O}_{K'}$ qui apparaissent quand on écrit la décomposition des idéaux premiers de \mathcal{O}_K vus comme idéaux de $\mathcal{O}_{K'}$. Puisque \mathbb{F}_p est abélien, tout morphisme $G_{K',S'} \rightarrow \mathbb{F}_p$ se factorise par $G_{K',S'}^{\text{ab}}$. On s'intéresse donc aux morphismes continus $G_{K',S'}^{\text{ab}} \rightarrow \mathbb{F}_p$.

La théorie du corps de classes nous apprend que $G_{K',S'}^{\text{ab}} \simeq C_{K',S'}/D_{K',S'}$, où :

$$C_{K',S'} := \text{Coker} \left(K'^{\times} \rightarrow \bigoplus_{l \in S'} (K'_l)^{\times} \oplus \bigoplus_{l \notin S'} \mathcal{O}_{K'_l}^{\times} \right)$$

est le groupe des S' -idèles de K' , et où $D_{K',S'}$ est la composante connexe de l'identité dans ce groupe. Un morphisme continu $G_{K',S'}^{\text{ab}} \rightarrow \mathbb{F}_p$ est donc un morphisme continu :

$$\bigoplus_{l \in S'} (K'_l)^{\times} \oplus \bigoplus_{l \notin S'} \mathcal{O}_{K'_l}^{\times} \rightarrow \mathbb{F}_p$$

s'annulant sur l'image de K'^{\times} .

Il y a un nombre fini de morphismes continus $\bigoplus_{l \notin S'} \mathcal{O}_{K'_l}^{\times} \rightarrow \mathbb{F}_p$ s'annulant sur l'image de K'^{\times} :

En notant $q_{K'_l}$ le cardinal du corps résiduel de $\mathcal{O}_{K'_l}$ et $d_{K'_l} = [K'_l : \mathbb{Q}_l]$, on sait (voir [Neu99]) que pour tout l il existe un entier a_l pour lequel :

$$\mathcal{O}_{K'_l}^{\times} \simeq \mathbb{Z}/(q_{K'_l} - 1)\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/l^{a_l}\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_l^{d_{K'_l}}$$

où le morphisme $\mathcal{O}_{K'_l}^{\times} \rightarrow \mathbb{Z}/(q_{K'_l} - 1)\mathbb{Z}$ est donné par la projection sur le corps résiduel.

- L'élément $1 \in K'^{\times}$ est envoyé sur $1 \in \mathcal{O}_{K'_l}^{\times}$, puis sur l'unité du corps résiduel de $\mathcal{O}_{K'_l}^{\times}$. Par conséquent, pour qu'un morphisme $\mathcal{O}_{K'_l}^{\times} \rightarrow \mathbb{F}_p$ s'annule en $1 \in K'^{\times}$, il faut que le morphisme $\mathbb{Z}/(q_{K'_l} - 1)\mathbb{Z}$ associé soit nul en 1, et donc trivial.
- Soit f un morphisme $\mathbb{Z}/l^{a_l}\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{F}_p$. Si $l \neq p$, ce morphisme est nécessairement trivial (car p doit diviser $l^{a_l} f(1)$). Sinon il y a exactement p tels morphismes.
- Soit f un morphisme continu $\mathbb{Z}_l \rightarrow \mathbb{F}_p$. Alors il faut que pour n assez grand, $f(l^n) = 0$, cela signifie que p divise $l^n f(1)$. Si $p \neq l$, on a donc forcément $f(1) = 0$ d'où $f = 0$. Si au contraire $p = l$, il y a exactement p tels morphismes.

Tout cela montre que pour $l \neq p$, il y a un unique morphisme $\mathcal{O}_{K'_l}^\times \rightarrow \mathbb{F}_p$ s'annulant sur K' , et que pour $l = p$, il y en a un nombre fini (majoré par $p^{d_{K'_l}+1}$). Il y a donc au plus $p^{d_{K'_l}+1}$ morphismes $\bigoplus_{l \in S'} \mathcal{O}_{K'_l}^\times \rightarrow \mathbb{F}_p$ s'annulant sur K'^\times .

Il y a un nombre fini de morphismes continus $\bigoplus_{l \in S'} (K'_l)^\times \rightarrow \mathbb{F}_p$:

Choisir un morphisme continu $\bigoplus_{l \in S'} (K'_l)^\times$ revient à prendre pour chaque $l \in S'$ un morphisme continu $(K'_l)^\times \rightarrow \mathbb{F}_p$. Par continuité, un tel morphisme définit un morphisme $\widehat{(K'_l)^\times} \rightarrow \mathbb{F}_p$. La théorie du corps de classe local donnant un isomorphisme $\widehat{(K'_l)^\times} \simeq G_{K'_l}^{\text{ab}}$, on est ramené au cas local : si on montre qu'il n'y a qu'un nombre fini de morphismes continus $G_{K'_l} \rightarrow \mathbb{F}_p$ pour chaque $l \in S'$, on aura prouvé le résultat, S' étant fini.

- **Dans le deuxième cas (local) :** Si K est un corps local l -adique, on a pour un certain entier a l'isomorphisme suivant, donné par la théorie du corps de classes local :

$$G_K^{\text{ab}} \simeq \widehat{K^\times} \simeq \widehat{\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/l^a\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_l^{d_K}$$

où, comme précédemment, q est le cardinal du corps résiduel de \mathcal{O}_K et $d_K = [K : \mathbb{Q}_l]$. Ainsi, G_K^{ab} est topologiquement finiment engendré, et puisque \mathbb{F}_p est fini il y a un nombre fini de morphismes continus $G_K^{\text{ab}} \rightarrow \mathbb{F}_p$, et donc un nombre fini de morphismes continus $G_K \rightarrow \mathbb{F}_p$. On peut même les compter : il y en a au plus p^{d_K+3} (et même au plus p^2 si $l \neq p$).

Cela donne même une borne effective sur le nombre de morphismes continus $G_{K',S'} \rightarrow \mathbb{F}_p$: il y en a au plus $p^{2|S'|+d_{K'}+1}$ (où $d_{K'} = [K' : \mathbb{Q}]$). \square

Remarque 3. Une troisième preuve, encore différente mais moins générale, consiste à utiliser la théorie de KUMMER. On se place dans le cas où K contient les racines p -ièmes de l'unité, et on écrit la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mu_p \rightarrow \bar{K}^\times \xrightarrow{x \mapsto x^p} \bar{K}^\times \rightarrow 0$$

d'où on déduit la suite exacte suivante en cohomologie :

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & \rightarrow & H^0(G, \mu_p) & \rightarrow & H^0(G, \bar{K}^\times) & \rightarrow & H^0(G, \bar{K}^\times) & \rightarrow & H^1(G, \mu_p) & \rightarrow & H^1(G, \bar{K}^\times) & \rightarrow & \dots \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{F}_p & \longrightarrow & K^\times & \longrightarrow & K^\times & \longrightarrow & \text{Hom}(G, \mathbb{F}_p) & \longrightarrow & 0 & & \end{array}$$

où l'égalité dans la dernière colonne provient du théorème 90 de HILBERT. Ainsi les morphismes de G dans \mathbb{F}_p sont en bijection avec les éléments de $K^\times / \ker(K^\times \rightarrow \text{Hom}(G, \mathbb{F}_p)) = K^\times / (K^\times)^p$. Or $K^\times / (K^\times)^p$ a une structure naturelle de \mathbb{F}_p -espace vectoriel de dimension finie, et donc $\text{Hom}(G, \mathbb{F}_p)$ est fini. En caractéristique p , il faut regarder $x \mapsto x^p - x$ au lieu de x^p : c'est la théorie d'ARTIN-SCHREIER.

Pour toutes ces raisons, on considérera souvent dans ce qui suit un groupe « abstrait » G , profini et vérifiant la condition Φ_p , pour incarner en potentialité un groupe de GALOIS absolu quelconque (soit G_K , soit $G_{K,S}$, soit en fait n'importe quel groupe fondamental étale de variétés de type fini sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$), avec en tête l'idée qu'on peut substituer un exemple concret de tel groupe de GALOIS dans ces énoncés. On écrira de manière générale toujours les hypothèses des théorèmes, mais il est utile de savoir que ceux-ci seront amenés à être appliqués dans ce contexte.

1.1.3 Présentation brève des vecteurs de WITT

Nous aurons souvent besoin de l'anneau des vecteurs de WITT, qui généralise le lien existant entre \mathbb{Z}_p et \mathbb{F}_p . On rappelle brièvement les propriétés essentielles de cet objet. On trouvera les détails absents ici dans le rappel qu'en fait [Ber04].

Soit R un anneau parfait de caractéristique p . Il se trouve qu'il existe toujours un anneau de valuation discrète (unique à isomorphisme près) $W(R)$ de caractéristique nulle, séparé et complet pour la topologie p -adique, et de corps résiduel R . C'est l'anneau des vecteurs de WITT de R .

L'application W est en fait un foncteur (de la catégorie des anneaux parfaits de caractéristique p dans la catégorie des anneaux locaux complets pour la topologie p -adique), et on obtient par functorialité un automorphisme de FROBENIUS sur $W(R)$, image de la surjection de FROBENIUS $x \mapsto x^p$.

Si x est un élément de R , en choisissant une famille x_n d'éléments de $W(R)$ dont l'image par le morphisme $W(R) \rightarrow R$ (le passage au quotient par l'idéal maximal) est une racine p^n -ième de x (qui existent puisque R est supposé parfait), on peut définir l'élément suivant de $W(R)$:

$$[x] = \lim_{n \in \mathbb{N}} (x_n)^{p^n}$$

On vérifie que cette suite converge bien (car elle est de CAUCHY) et que sa limite ne dépend pas des choix de x_n . On appelle $[x]$ le représentant de TEICHMÜLLER de x (c'est un représentant au sens où son image dans R est x), et l'application $x \mapsto [x]$ est multiplicative. Avec cette notation, on peut écrire tout élément de $W(R)$ de manière unique sous la forme :

$$x = \sum_{n \in \mathbb{N}} p^n [x_n], \text{ où } x_n \in R$$

1.2 Les déformations

1.2.1 Histoire et motivation

Les représentations galoisiennes

Le groupe de GALOIS absolu d'un corps K possède par construction une action sur \bar{K} , qui induit par functorialité des actions sur la plupart des objets qu'on construira à partir

de \bar{K} . Lorsque ces objets seront des modules ou des espaces vectoriels (comme dans le cas des différentes cohomologies), on obtiendra donc ce qu'on appelle des représentations galoisiennes :

Définition 4 (représentation galoisienne). Une représentation galoisienne (de K) sur un anneau topologique A est un morphisme continu de groupes :

$$\rho : G_K \rightarrow GL_n(A)$$

On généralise naturellement la notion aux représentations de $G_{K,S}$.

Cette définition est motivée par son apparition naturelle dans un certain nombre de contextes en arithmétique et en géométrie. L'étude des représentations galoisiennes est au cœur de théories nombreuses, telles que la cohomologie galoisienne (voir [Ser62]) et la théorie du corps de classe (voir [Mil13a]).

Premiers exemples de déformations

Soit une courbe elliptique E sur un corps de nombres K .

Les points de p -torsion de E dans \bar{K} forment un groupe isomorphe à \mathbb{F}_p^2 (voir [Dat18]), sur lequel $\text{Gal}(\bar{K} | K)$ agit naturellement (coordonnée par coordonnée sur les points). Cela donne une représentation galoisienne qu'on nommera résiduelle :

$$\bar{\rho} : \text{Gal}(\bar{K} | K) \rightarrow GL_2(\mathbb{F}_p)$$

De même les points de p^n -torsion forment une suite de groupes isomorphes à $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^2$ avec des actions « compatibles » de $\text{Gal}(\bar{K} | K)$, si bien qu'on peut en déduire une action de ce groupe sur \mathbb{Z}_p^2 en passant à la limite projective. On obtient ainsi une représentation galoisienne :

$$\rho : \text{Gal}(\bar{K} | K) \rightarrow GL_2(\mathbb{Z}_p)$$

Par construction, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} & & GL_2(\mathbb{Z}_p) \\ & \nearrow \rho & \downarrow \\ \text{Gal}(\bar{K} | K) & \xrightarrow{\bar{\rho}} & GL_2(\mathbb{F}_p) \end{array}$$

On dira plus tard que ρ est (un représentant d')une déformation de $\bar{\rho}$: c'est un premier exemple de déformation. L'apparition de ce genre de « déformations » dans un nombre croissant de contextes naturels (notamment l'étude des formes modulaires p -adiques par HIDA) a mené à leur étude systématique par MAZUR. Notamment, HIDA a obtenu des familles de représentations galoisiennes qui induisaient la même représentation sur \mathbb{F}_p (on trouvera des détails supplémentaires dans [Gou91]). La définition du foncteur des déformations est une tentative d'imitation en toute généralité de ce phénomène.

Dans la plupart des applications, le cas $n = 2$, $k = \mathbb{F}_p$, déjà intéressant, est celui réellement considéré. On considérera les représentations de dimension quelconque avant tout parce que cela ne complexifie nullement les preuves qui vont suivre.

1.2.2 Le foncteur des déformations

On rappelle que k est un corps de caractéristique p .

Définition 5 (anneau de coefficients). Un anneau de coefficients est un anneau A qui est à la fois :

- noethérien : toute suite croissante d'idéaux de A stationne ;
- local : A admet un unique idéal maximal \mathfrak{m}_A (ce qui définit une valuation v_A sur A par $v_A(x) = \max\{i \mid x \in \mathfrak{m}_A^i\}$) ;
- complet :

$$A = \varprojlim_n A/\mathfrak{m}_A^n$$

ce qui revient à dire que toute suite u_n qui est « de CAUCHY » (au sens où $\forall K, \exists n_0, \forall n \geq n_0, \forall m \geq n_0, v_A(u_n - u_m) \geq K$) est convergente, pour la topologie définie par la valuation v_A ;

- de corps résiduel k :

$$A/\mathfrak{m}_A = k$$

On note \mathcal{C} la catégorie des anneaux de coefficients, avec pour morphismes les morphismes continus d'anneaux locaux¹ qui induisent l'identité sur k . On note \mathcal{C}^0 la sous-catégorie pleine de \mathcal{C} dont les objets sont les anneaux de coefficients artiniens (toute suite décroissante d'idéaux stationne).

On notera que tout élément A de \mathcal{C} est limite projective d'éléments de \mathcal{C}^0 , puisque $A = \varprojlim_n A/\mathfrak{m}_A^n$ où \mathfrak{m}_A est l'idéal maximal de A .

Soit G un groupe profini satisfaisant la condition Φ_p (dans l'idée, un groupe de GALOIS absolu), $\bar{\rho}$ une représentation $G \mapsto GL_n(k)$ (ce qu'on nommera représentation résiduelle) et A un anneau de coefficients (de corps résiduel k). On s'intéresse aux représentations $\rho : G \mapsto GL_n(A)$ qui font commuter ce diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & & GL_n(A) \\ & \nearrow \rho & \downarrow \\ G & \xrightarrow{\bar{\rho}} & GL_n(k) \end{array}$$

1. Un morphisme $A \rightarrow B$ d'anneaux locaux est un morphisme d'anneaux tel que l'image de \mathfrak{m}_A soit incluse dans \mathfrak{m}_B .

où le morphisme $GL_n(A) \rightarrow GL_n(k)$ est le quotient coefficient par coefficient par l'idéal maximal. Notons $\Gamma_n(A)$ son noyau : c'est l'ensemble des matrices de $GL_n(A)$ de la forme $I_n + M$ où les coefficients de M sont dans l'idéal maximal de A .

Définition 6 (équivalence stricte). On dit que deux représentations $\rho_1, \rho_2 : G \mapsto GL_n(A)$ sont strictement équivalentes si l'une s'obtient à partir de l'autre par conjugaison par une matrice de $\Gamma_n(A)$. Deux représentations strictement équivalentes induisent bien sûr la même représentation résiduelle.

Définition 7 (déformation). Les *déformations* de la représentation $\bar{\rho}$ à A sont les classes d'équivalence stricte des représentations $G \mapsto GL_n(A)$ qui induisent $\bar{\rho}$ par projection (c'est-à-dire qui font commuter le diagramme ci-dessus).

L'application qui à un anneau de coefficients A associe l'ensemble des déformations de $\bar{\rho}$ à A définit un foncteur $D_{\bar{\rho}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$: c'est le foncteur des déformations.

La raison pour laquelle on regarde les déformations à équivalence stricte près est que, du point de vue du problème qui nous intéresse, deux représentations strictement équivalentes sont « la même déformation », et on n'a pas envie de compter plusieurs fois la même solution au problème.

Par ailleurs, on pourrait se demander pourquoi on ne va s'intéresser qu'aux déformations à des anneaux de coefficients. Il y a trois raisons principales :

- Les exemples pertinents et historiquement importants de déformations correspondent à ce cas ; typiquement, $A = \mathbb{Z}_p$ et $k = \mathbb{F}_p$;
- Les morphismes entre anneaux de coefficients ont des propriétés intéressantes : on peut étudier l'injectivité/surjectivité à partir des espaces tangents, et les surjections se découpent en un nombre fini de « petites extensions » (des sortes d'extensions infinitésimales) sur lesquelles on peut facilement travailler puis rassembler les résultats pour résoudre des problèmes arithmétiques ;
- Il y a une théorie puissante des foncteurs sur les anneaux de coefficients, comme on le verra plus tard avec le critère de SCHLESSINGER.
- Du fait de l'existence d'une topologie complète, d'invariants tels que les espaces tangents et leur dimension, etc., les anneaux de coefficients sont déjà des objets « géométriques » : ils sont donc de bons candidats pour tenter de munir l'espace des déformations d'une structure géométrique.

Le foncteur des déformations sera l'objet d'étude principal de ce mémoire. Sa définition remonte à MAZUR, qui a cerné ses propriétés. Lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion, on notera simplement $D = D_{\bar{\rho}}$.

Voyons une première caractéristique de ce foncteur :

Proposition 8. *Le foncteur D est continu, c'est-à-dire que pour tout $A \in \mathcal{C}$ le morphisme canonique*

$$D(A) \rightarrow \varprojlim_k D(A/\mathfrak{m}_A^k)$$

est un isomorphisme.

Preuve. Puisque $A \simeq \varprojlim_k A/\mathfrak{m}_A^k$ et puisqu'on peut choisir des suites compatibles d'inverses à des matrices compatibles de $GL_n(A/\mathfrak{m}_A^k)$, on a :

$$GL_n(A) \simeq \varprojlim_k GL_n(A/\mathfrak{m}_A^k)$$

et de même :

$$\Gamma_n(A) \simeq \varprojlim_k \Gamma_n(A/\mathfrak{m}_A^k)$$

— **Surjectivité :** Soit un élément de $\varprojlim_k D(A/\mathfrak{m}_A^k)$, c'est-à-dire une suite compatible d'éléments $\bar{\rho}_k$ de $D(A/\mathfrak{m}_A^k)$. On va construire par récurrence une suite compatible de représentations $\rho_k : G \rightarrow GL_n(A/\mathfrak{m}_A^k)$ telles que ρ_k soit dans la classe $\bar{\rho}_k$:

- Pour $k = 1$, on a forcément $\rho_1 = \bar{\rho}$.
- Supposons $\rho_1, \dots, \rho_{k-1}$ construits. Par hypothèse $\bar{\rho}_k$ induit par projection $\bar{\rho}_{k-1}$, qui est la classe de ρ_{k-1} . Choisissons un représentant $\tilde{\rho}_k$ de $\bar{\rho}_k$. Par projection, $\tilde{\rho}_k$ induit une représentation $\widetilde{\rho_{k-1}}$ strictement équivalente à ρ_{k-1} . Écrivons donc $\widetilde{\rho_{k-1}} = M_{k-1}^{-1} \rho_{k-1} M_{k-1}$ avec $M_{k-1} \in \Gamma_n(A/\mathfrak{m}_A^{k-1})$. Soit M_k un relèvement arbitraire de M_{k-1} dans $\Gamma(A/\mathfrak{m}_A^k)$, alors en posant $\rho_k = M_k \tilde{\rho}_k M_k^{-1}$, on a comme souhaité que ρ_k induit ρ_{k-1} .

La suite compatible ρ_k induit une représentation qui se trouve dans

$$\varprojlim_k \text{Hom}(G, GL_n(A/\mathfrak{m}_A^k)) \simeq \text{Hom}(G, \varprojlim_k GL_n(A/\mathfrak{m}_A^k)) \simeq \text{Hom}(G, GL_n(A))$$

D'où une déformation qui se trouve dans $D(A)$ et qui induit par projection les différents $\bar{\rho}_k$. On a bien montré que le morphisme d'intérêt était surjectif.

— **Injectivité :** Si on a deux éléments $\bar{\rho}, \bar{\rho}'$ de $D(A)$ qui induisent les mêmes éléments $\bar{\rho}_k = \bar{\rho}'_k$ dans les $D(A/\mathfrak{m}_A^k)$, on peut construire par récurrence (de manière similaire à ce qui est fait dans la surjectivité) un élément $M \in \varprojlim_k (\Gamma_n(A/\mathfrak{m}_A^k)) \simeq \Gamma_n(A)$ tel que $\rho_k = M_k^{-1} \rho'_k M_k$ et donc (en se rappelant que $GL_n(A) \simeq \varprojlim_k GL_n(A/\mathfrak{m}_A^k)$) : $\rho = M^{-1} \rho' M$ soit $\bar{\rho} = \bar{\rho}'$.

□

Cette propriété est essentielle : outre le fait qu'elle nous donne des raisons de croire en la (pro-)représentabilité du foncteur des déformations, elle indique pourquoi il est suffisant de s'intéresser aux anneaux de coefficients de \mathcal{C}^0 et pas forcément à tous ceux de \mathcal{C} : puisque tout anneau de coefficients est limite d'anneaux de \mathcal{C}^0 , on peut calculer son image par le foncteur des déformations comme la limite des images de ses quotients.

1.2.3 (pro)-Représentabilité du foncteur

Une question importante est de savoir si $D_{\bar{\rho}}$ est un foncteur représentable, c'est-à-dire s'il est isomorphe (par une transformation naturelle) à un foncteur de la forme $h_{\mathfrak{A}_{\bar{\rho}}} = \text{Hom}(\mathfrak{A}_{\bar{\rho}}, -)$, pour un certain anneau de coefficients $\mathfrak{A}_{\bar{\rho}}$. Motivons un peu cette question en réfléchissant aux conséquences d'une réponse positive :

Remarque 9. Un tel anneau $\mathfrak{A}_{\bar{\rho}}$ (lorsqu'il existe) s'appelle anneau de déformation universel, et contient des informations précieuses sur les déformations de $\bar{\rho}$ (et dit donc des choses « de nature arithmétique » sur cette représentation). En particulier, le morphisme $\text{id}_{\mathfrak{A}_{\bar{\rho}}}$ correspond à une déformation $\rho : G \rightarrow GL_n(\mathfrak{A}_{\bar{\rho}})$ qui est universelle au sens suivant :

Soit ρ' une déformation $G \rightarrow GL_m(A)$. Elle correspond à un *unique* morphisme $\varphi : \mathfrak{A}_{\bar{\rho}} \rightarrow A$. Puisque par ailleurs $\varphi = \varphi \circ \text{id}_{\mathfrak{A}_{\bar{\rho}}} = h_{\mathfrak{A}_{\bar{\rho}}}(\varphi)(\text{id}_{\mathfrak{A}_{\bar{\rho}}})$, la définition d'une transformation naturelle nous dit que $\rho' = D(\varphi)(\rho) = \varphi_*(\rho)$ (application de φ coefficient par coefficient).

Autrement dit, la connaissance de $\mathfrak{A}_{\bar{\rho}}$ et de ρ permet de paramétrer toutes les déformations de $\bar{\rho}$.

On peut dire les choses de manière plus floues, mais peut-être aussi plus visuelles, en disant qu'avoir un anneau universel de déformation (et donc un schéma affine associé, etc.) est un moyen de donner une structure géométrique à l'espace des déformations. Un anneau universel de déformation est comme un espace des paramètres permettant de faire varier continûment des déformations.

On peut aussi poser la question en terme du foncteur restreint à \mathcal{C}^0 . Il faut alors introduire la notion de pro-représentabilité :

Définition 10 (foncteur pro-représentable). Un foncteur $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Set}$ est pro-représentable s'il est colimite **filtrée** de foncteurs représentables. Cette définition intrinsèque est motivée par le fait que si \mathcal{D} se réalise comme sous-catégorie pleine d'une catégorie \mathcal{D}' complète, alors pour tout objet $D \in \mathcal{D}$:

$$\begin{aligned} F(D) &\simeq \varinjlim_{k, \text{filtrée}} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(D_k, D) \\ &\simeq \varinjlim_{k, \text{filtrée}} \text{Hom}_{\mathcal{D}'^{\text{op}}}(D, D_k) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}'^{\text{op}}}\left(D, \varinjlim_{k, \text{filtrée}} D_k\right) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}'}\left(\varprojlim_{k, \text{filtrée}} D_k, D\right) \end{aligned}$$

(il faut faire attention au fait que le passage de la deuxième à la troisième ligne n'est possible que parce que la colimite est filtrée)

Autrement dit, il existe dans \mathcal{D}' un *pro-objet* de \mathcal{D} (une limite projective d'objets de \mathcal{D}) qui « représente » en un sens le foncteur de \mathcal{D} .

Ici, on a bien sûr envie de prendre $F = D|_{\mathcal{C}^0}$, $\mathcal{D} = \mathcal{C}^0$ et $\mathcal{D}' = \mathcal{C}$: la question de la pro-représentabilité de $D|_{\mathcal{C}^0}$ est équivalente à la question de la représentabilité de D (puisque D est continu et que tout objet de \mathcal{C} est un pro-objet de \mathcal{C}^0).

En fait, en général, le foncteur des déformations n'est pas (pro-)représentable, mais on va obtenir des conditions précises pour savoir quand c'est le cas ; et dans les autres cas nous obtiendrons un autre objet qui s'approche « autant que possible » d'un anneau de déformation universel.

1.3 Les critères de GROTHENDIECK et SCHLESSINGER

Les critères de GROTHENDIECK et SCHLESSINGER donnent des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un foncteur $\mathcal{C}^0 \rightarrow \mathbf{Set}$ soit pro-représentable.

Puisque la plupart des conditions s'exprimeront en fonction de ce morphisme, il est utile de détailler rapidement la construction, pour un foncteur $F : \mathcal{C}^0 \rightarrow \mathbf{Set}$ donné et des morphismes $A \rightarrow C$, $B \rightarrow C$, du morphisme canonique :

$$F \left(A \times_C B \right) \rightarrow F(A) \times_{F(C)} F(B)$$

Pour le définir, il suffit de définir deux morphismes $F \left(A \times_C B \right) \rightarrow F(A)$ et $F \left(A \times_C B \right) \rightarrow F(B)$ ayant même image dans $F(C)$. Or, les images par F des morphismes canoniques $A \times_C B \rightarrow A, B$ (de projection sur chaque coordonnée) satisfont ces conditions, ce qui permet de définir le morphisme souhaité.

Lorsque F est (pro-)représentable, il est immédiat de voir que ce morphisme est un isomorphisme (il s'agit essentiellement d'une reformulation de la propriété universelle du produit fibré). La recherche d'une sorte de réciproque justifie de s'intéresser plus en détail à ce morphisme.

1.3.1 Espaces (co)tangents et nombres duaux

Espace tangent de ZARISKI

Définition 11 (espace (co)tangent). Soit un anneau de coefficients A . On définit :

$$t_A^* = \mathfrak{m}_A / \mathfrak{m}_A^2$$

l'espace cotangent de A , et on définit également l'espace tangent de A comme étant son dual :

$$t_A = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(t_A^*, k)$$

On pourrait s'étonner de cette définition des espaces tangents : si on a une application $f : A \rightarrow B$, elle induit une application $d^*f : t_A^* \rightarrow t_B^*$ et donc $df : t_B \rightarrow t_A$. Sachant qu'on veut « simuler » la situation ordinaire de la géométrie différentielle, on pourrait penser que

le morphisme est dans le mauvais sens. En réalité, c'est le morphisme $A \rightarrow B$ qui « est dans le mauvais sens » : l'interprétation géométrique devient correcte lorsqu'on pense à f comme à un morphisme de schémas $\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$.

Propriété 12. Soit $A \in \mathcal{C}$. L'espace cotangent t_A^* est muni d'une structure de k -espace vectoriel de dimension finie (et il en va donc de même de l'espace tangent).

Preuve. Montrons que la multiplication par un scalaire est bien définie. Soit $\bar{\lambda} \in k$ (avec $\lambda \in A$) et $\bar{x} \in t_A^*$ (avec $x \in \mathfrak{m}_A$). Si $\delta_1 \in \mathfrak{m}_A$ et $\delta_2 \in \mathfrak{m}_A^2$, alors :

$$(\lambda + \delta_1)(x + \delta_2) = \underbrace{\lambda x}_{\in \mathfrak{m}_A} + \underbrace{\delta_1 x + \delta_2 x + \delta_1 \delta_2}_{\in \mathfrak{m}_A^2}$$

Cela montre que la classe dans $\mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2$ de λx ne dépend pas de la classe de λ dans A/\mathfrak{m}_A et de x dans $\mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2$, d'où une action de k sur t_A^* . Les différents axiomes d'espace vectoriel sont clairement vérifiés.

Puisque A est noëthérien, \mathfrak{m}_A est finiment engendré comme idéal de A et donc t_A^* est de dimension finie comme k -espace vectoriel (après projection dans $\mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2 = t_A^*$ des générateurs). \square

Nombres duaux

Définition 13 (nombres duaux). On appelle espace des nombres duaux l'anneau de coefficients suivant :

$$k[\varepsilon] = k[X]/(X^2)$$

Il faut voir ε comme un nombre infinitésimal. Par exemple, si $P \in k[X]$, on a $P(a + \varepsilon b) = P(a) + \varepsilon b P'(a)$.

Cet anneau permet une autre description de t_A :

Proposition 14. Soit $A \in \mathcal{C}$, alors :

$$t_A \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, k[\varepsilon])$$

Preuve. Soit un morphisme $\varphi : A \rightarrow k[\varepsilon]$. Alors pour tout $x \in A$ on peut écrire $\varphi(x) = \bar{x} + \varepsilon f(x)$ (car φ induit l'identité sur les corps résiduels) pour une certaine application $f : A \rightarrow k[\varepsilon]$. Regardons les propriétés de f :

- f détermine φ : c'est évident ;
- f est additive : c'est clair ;
- On a :

$$\begin{aligned} \varphi(xy) &= \overline{xy} + \varepsilon f(xy) = \bar{x}\bar{y} + \varepsilon f(xy) \\ &= \varphi(x)\varphi(y) = (\bar{x} + \varepsilon f(x))(\bar{y} + \varepsilon f(y)) = \bar{x} + \varepsilon(\bar{x}f(y) + \bar{y}f(x)) + \varepsilon^2(\dots) \end{aligned}$$

Ce qui montre qu'on a la « relation de LEIBNIZ » :

$$f(xy) = \bar{x}f(y) + \bar{y}f(x)$$

— Puisque φ est un morphisme de $W(k)$ -algèbres, on a, pour tout $x \in k$,

$$\varphi([x]) = [x]\varphi(1) = [x] = x$$

(la relation $[x] = x$ est vraie dans tout anneau de caractéristique p , et donc dans $k[\varepsilon]$, comme on le vérifie en revenant à la définition du représentant de TEICHMÜLLER)

et donc $\forall x \in k, f([x]) = 0$. En particulier, $f(x) = f(x - [\bar{x}])$. Puisque $x - [\bar{x}] \in \mathfrak{m}_A$, la fonction f est entièrement déterminée par sa restriction $f_1 : \mathfrak{m}_A \rightarrow k$. L'application f_1 est additive et vérifie, pour $m \in \mathfrak{m}_A$ et $x \in A$ quelconques :

$$f_1(mx) = \underbrace{\bar{m}}_{=0} f_1(x) + \bar{x}f_1(m) = \bar{x}f_1(m) \quad (1.1)$$

— Si $x, y \in \mathfrak{m}_A$, alors :

$$f(xy) = \underbrace{\bar{x}}_{=0} f(y) + \underbrace{\bar{y}}_{=0} f(x) = 0$$

Donc f s'annule sur \mathfrak{m}_A^2 . On peut ainsi définir l'application $f_2 : \mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2 \rightarrow k$ sans ambiguïté par la relation $f_2(x + \mathfrak{m}_A^2) := f_1(x)$. L'application f_2 ainsi obtenue caractérise toujours uniquement φ , et par ailleurs c'est un morphisme de k -espaces vectoriels, puisque si $\lambda \in k$ (avec $[\lambda] \in A$ son représentant de TEICHMÜLLER) et $m \in \mathfrak{m}_A$, alors :

$$f_2(\lambda(m + \mathfrak{m}_A^2)) = f_2([\lambda](m + \mathfrak{m}_A^2)) = f_1([\lambda]m) \stackrel{(1.1)}{=} [\bar{\lambda}]f_1(m) = \lambda f_2(m + \mathfrak{m}_A^2)$$

Il est clair par ailleurs qu'étant donné un morphisme de k -espaces vectoriels $f'_2 : \mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2 \rightarrow k[\varepsilon]$, on peut construire un morphisme d'anneaux de coefficients $\varphi' : x \mapsto \bar{x} + \varepsilon f'_2((x - [\bar{x}]) + \mathfrak{m}_A^2)$ entre A et $k[\varepsilon]$.

Autrement dit, on vient de décrire un isomorphisme canonique :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, k[\varepsilon]) \simeq \mathrm{Hom}_{k\text{-Vect}}(\mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2, k) = t_A$$

□

En regardant plus précisément la manière dont l'isomorphisme précédent a été construit, on se rend compte que si on a un morphisme $f : A \rightarrow B$, le morphisme $df : t_B \rightarrow t_A$ qu'il induit et l'application $\circ f : \mathrm{Hom}(B, k[\varepsilon]) \rightarrow \mathrm{Hom}(A, k[\varepsilon])$ s'insèrent dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} t_B & \xrightarrow{df} & t_A \\ \wr & & \wr \\ \mathrm{Hom}(B, k[\varepsilon]) & \xrightarrow{\circ f} & \mathrm{Hom}(A, k[\varepsilon]) \end{array}$$

Espace tangent à un foncteur

Définition 15 (espace tangent). Soit un foncteur $F : \mathcal{C}^0 \rightarrow \mathbf{Set}$. On définit :

$$t_F = F(k[\varepsilon])$$

Ce nom est motivé en partie par le fait suivant :

Propriété 16. Si F est pro-représenté par un anneau $R \in \mathcal{C}$, alors $t_F \simeq t_R$.

Preuve. C'est une conséquence directe de la proposition précédente :

$$t_F = F(k[\varepsilon]) \simeq \text{Hom}(R, k[\varepsilon]) = t_R$$

□

En particulier, si F est pro-représentable, alors t_F est muni d'une structure de k -espace vectoriel de dimension finie. Cela suggère une condition nécessaire de pro-représentabilité. Commençons par munir t_F d'une structure d'espace vectoriel sous des hypothèses plus faibles :

Lemme 17. Supposons que le morphisme :

$$F \left(k[\varepsilon] \times_k k[\varepsilon] \right) \rightarrow F(k[\varepsilon]) \times F(k[\varepsilon]) \quad (= t_F^2)$$

soit un isomorphisme. Alors t_F est muni d'une structure naturelle de k -espace vectoriel.

Preuve. Il s'agit avant tout de parvenir à définir une somme et la multiplication par des scalaires.

— **Somme** : La somme doit être un morphisme $t_F^2 \rightarrow t_F$. Vu l'hypothèse, il suffit de définir un morphisme

$$F \left(k[\varepsilon] \times_k k[\varepsilon] \right) \rightarrow t_F \quad (= F(k[\varepsilon]))$$

Un élément de $k[\varepsilon] \times_k k[\varepsilon]$ est un couple $(a + b\varepsilon, a' + b'\varepsilon)$ tel que $a = a'$ (en raison du produit fibré). Un choix naturel d'addition $k[\varepsilon] \times_k k[\varepsilon] \rightarrow k[\varepsilon]$ est alors $(a + b\varepsilon, a + b'\varepsilon) \mapsto (a + (b + b')\varepsilon)$.

Il suffit de prendre l'image par F de ce morphisme pour obtenir une addition sur t_F . Il est aisé de vérifier que t_F muni de cette opération est un groupe abélien.

— **Multiplication par un scalaire** : Soit $\lambda \in k$. La multiplication par λ doit être un morphisme $t_F \rightarrow t_F$, c'est-à-dire $F(k[\varepsilon]) \rightarrow F(k[\varepsilon])$.

Puisque l'addition « n'agit que sur la composante en ε », la seule définition raisonnable de la multiplication par λ sur $k[\varepsilon]$ pour espérer avoir de la compatibilité est $a + b\varepsilon \mapsto a + \lambda b\varepsilon$.

L'image par F de cette opération donne un morphisme $\lambda \cdot : t_F \rightarrow t_F$. Il est automatique de vérifier que ces opérations munissent bien t_F d'une structure de k -espace vectoriel.

□

Le principal intérêt de ce lemme, outre qu'il appuie un peu plus la comparaison entre t_F et un espace tangent, est qu'il permet de donner un sens à l'hypothèse « t_F est de dimension finie »², dont on aura fréquemment besoin.

Lemme 18. *Soit I un k -espace vectoriel de dimension finie. On définit $k[I]$ avec la convention que le produit de deux éléments de I est nul. On suppose que le foncteur F satisfait $F(k[I \oplus I']) = F(k[I] \times_k k[I']) \simeq F(k[I]) \times F(k[I'])$ pour tous k -espaces vectoriels I et I' . Alors :*

$$F(k[I]) \simeq t_F \otimes I$$

Preuve. Les morphismes $k[\varepsilon] \rightarrow k[I]$ correspondent aux éléments de I via l'application d'évaluation en ε . Ainsi, à tout élément de I correspond par functorialité une application $t_F = F(k[\varepsilon]) \rightarrow F(k[I])$, c'est-à-dire qu'on a une application :

$$t_F \times I \rightarrow F(k[I])$$

On définit sur $F(k[I])$ une structure d'espace vectoriel de manière parfaitement similaire à ce qu'on a fait pour ε . Il est aisé alors de voir que l'application précédente est k -bilinéaire. Elle induit donc un morphisme linéaire :

$$t_F \otimes_k I \rightarrow F(k[I])$$

De plus $k[I] = k[\varepsilon] \times_k k[\varepsilon] \times_k \dots \times_k k[\varepsilon]$ avec $\dim_k(I)$ copies de $k[\varepsilon]$ (un fait similaire est prouvé dans la sous-section 1.5.2). Ainsi en utilisant l'hypothèse :

$$F(k[I]) \simeq F(k[\varepsilon]) \times F(k[\varepsilon]) \times \dots \times F(k[\varepsilon])$$

donc la dimension de $F(k[I])$ est égale à $\dim_k(I) \times \dim_k(t_F) = \dim(t_F \otimes_k I)$, ce qui montre que le morphisme précédent était un isomorphisme. □

1.3.2 Critère de GROTHENDIECK

Dans les paragraphes précédents, nous avons obtenu deux conditions nécessaires de pro-représentabilité (F commute avec les produits, t_F est de dimension finie). Il se trouve que leur conjonction est une condition suffisante au sens suivant :

2. En revanche, dans le cas où k est fini (déjà intéressant en lui-même), il n'y a pas besoin de s'embêter avec la structure d'espace vectoriel, puisqu'il suffit de considérer l'hypothèse « t_F est fini ».

Théorème 19 (critère de GROTHENDIECK). *Soit $F : \mathcal{C}^0 \rightarrow \mathbf{Set}$ un foncteur. On suppose que $F(k)$ est un singleton³. Alors F est pro-représentable si et seulement si :*

1. F satisfait la « propriété de MAYER–VIETORIS », c'est-à-dire que le morphisme canonique

$$F \left(\begin{array}{c} A \times B \\ C \end{array} \right) \rightarrow F(A) \times_{F(C)} F(B)$$

est toujours un isomorphisme ;

2. Le k -espace vectoriel $t_F = F(k[\varepsilon])$ est de dimension finie (ce qui a un sens lorsque la condition précédente est satisfaite).

Preuve. Ce théorème, moins général que le suivant, s'en déduit aisément. On pourra toutefois en lire une preuve très claire et complète dans [Gou91] (pp. 105-109). \square

Ce critère est malaisé à vérifier, puisqu'il faut vérifier la propriété de MAYER–VIETORIS sur tous les produits fibrés. De plus, comme on le verra dans les sections suivantes, l'existence d'un anneau de déformation universel est une condition très forte qu'il est possible de raisonnablement affaiblir.

1.3.3 Critère de SCHLESSINGER

L'idée derrière le critère de SCHLESSINGER est d'avoir d'une part une compréhension plus fine du critère précédent, et d'autre part d'avoir des conditions plus simples à vérifier. Commençons par présenter un affaiblissement de la notion de représentant d'un foncteur :

Définition 20 (anneau de déformation versel). On dit que R est un *anneau de déformation versel* du foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ s'il y a une transformation naturelle

$$\Phi : \mathrm{Hom}(R, -) \rightarrow F$$

telle que pour toute surjection $p : B \rightarrow A$, l'application

$$\mathrm{Hom}(R, B) \rightarrow F(B) \times_{F(A)} \mathrm{Hom}(R, A)$$

qu'elle définit (par $\varphi \mapsto (\Phi_B(\varphi), p \circ \varphi)$) soit toujours surjective.

Remarquons qu'en prenant par exemple $p : A \rightarrow k$, on s'aperçoit que Φ_A est surjective pour tout $A \in \mathcal{C}$.

Définition 21 (enveloppe). On dit que R est une *enveloppe* (ou un *anneau de déformation miniversel*) du foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ si c'est un anneau de déformation versel et si de plus le morphisme $d\Phi : t_R \rightarrow t_F$ induit par la transformation naturelle $\Phi : \mathrm{Hom}(R, -) \rightarrow F$, défini à partir de $\Phi_{k[\varepsilon]}$ en se souvenant que $t_R \simeq \mathrm{Hom}(R, k[\varepsilon])$, est un isomorphisme.

3. C'est le cas pour les déformations, puisque la seule déformation de la représentation résiduelle à k est elle-même ; cette hypothèse nous place donc dans le cas qui nous intéresse.

Remarque 22. Une enveloppe R , si elle existe, est minimale parmi les anneaux de déformation versels au sens suivant : pour tout tel anneau R' , il existe une surjection $R' \rightarrow R$.⁴

Preuve. Soit R' un anneau de déformation versel, il y a alors une transformation naturelle

$$\Phi' : \text{Hom}(R', -) \rightarrow F$$

telle que pour toute surjection $p : B \rightarrow A$, l'application $\text{Hom}(R', B) \rightarrow F(B) \times_{F(A)} \text{Hom}(R', A)$ qu'elle définit est surjective.

Considérons l'image ξ de id_R par Φ_R , c'est un élément de $F(R)$ qui est donc image par Φ'_R d'un morphisme $f : R' \rightarrow R$ et induit ainsi un morphisme $d^*f : t_{R'}^* \rightarrow t_R^*$. Par ailleurs on a une transformation naturelle $\circ f : \text{Hom}(R, -) \rightarrow \text{Hom}(R', -)$. Pour $\varphi : R \rightarrow A$, on peut écrire :

$$\Phi'(\varphi \circ f) = F(\varphi)(\xi) = \Phi(\varphi)$$

On a donc $\Phi'_A \circ (\circ f)_A = \Phi_A$. En particulier, pour $A = k[\varepsilon]$, $d\Phi' \circ (\circ f)_{k[\varepsilon]} = d\Phi$. Puisque $d\Phi$ est un isomorphisme, $(\circ f)_{k[\varepsilon]}$ est injective. On vérifie que $(\circ f)_{k[\varepsilon]} = df$; ainsi df est injective et donc son application duale d^*f est surjective⁵.

D'après un lemme qu'on démontrera dans la sous-section 1.5.1, un morphisme qui induit une surjection sur les espaces cotangents est une surjection. Donc f est surjective. \square

L'enveloppe, si elle existe, est unique à isomorphisme près (la preuve est essentiellement la même que celle ci-dessus). La notion d'enveloppe affaiblit effectivement la notion de représentant, comme le montre la propriété suivante :

Propriété 23. *Si R représente le foncteur F , alors R est une enveloppe du foncteur F .*

Preuve. Par hypothèse, il existe un isomorphisme Φ de foncteurs :

$$\Phi : \text{Hom}(R, -) \xrightarrow{\sim} F$$

Soit un couple $(b, f) \in F(B) \times_{F(A)} \text{Hom}(R, A)$ et $\beta = \Phi_B^{-1}(b)$. Alors

$$p \circ \beta = \Phi_A^{-1}(\Phi_A(p \circ \beta)) = \Phi_A^{-1}(F(p)(\Phi_B(\beta))) = \Phi_A^{-1}(F(p)(b)) = \Phi_A^{-1}(\Phi_A(f)) = f$$

donc β est un antécédent de (b, f) dans $\text{Hom}(R, B)$.

Par ailleurs, $d\Phi = \Phi_{k[\varepsilon]} : t_R \simeq \text{Hom}(R, k[\varepsilon]) \xrightarrow{\sim} F(k[\varepsilon]) \simeq t_F$ est bien un isomorphisme, d'où le résultat. \square

L'existence d'une enveloppe donne lieu à une « déformation verselle », au sens suivant, qui affaiblit la notion de déformation universelle :

4. Cet usage du mot « minimal » peut paraître étrange, mais cela fait sens si on pense en termes de schémas : $\text{Spec}(R)$ s'injecte dans $\text{Spec}(R')$.

5. Dire que df est injective revient à dire que d^*f est un épimorphisme; il est connu que les épimorphismes entre espaces vectoriels de dimension finie sont des surjections.

Remarque 24. Supposons que F admette une enveloppe R . Notons $\rho_0 = \Phi_R(\text{id}_R)$.

Soit ρ un élément de $F(A)$ avec $A \in \mathcal{C}$ (dans l'idée, ρ est une déformation quelconque), alors il existe par hypothèse un morphisme $\tilde{\rho} : R \rightarrow A$ tel que $\Phi_A(\tilde{\rho}) = \rho$. Or en utilisant la définition d'une transformation naturelle :

$$\rho = \Phi_A(\tilde{\rho}) = \Phi_A(\tilde{\rho} \circ \text{id}_R) = F(\tilde{\rho})(\Phi_R(\text{id}_R)) = F(\tilde{\rho})(\rho_0)$$

Autrement dit, on peut obtenir les « déformations » à partir de ρ_0 et de morphismes arbitraires $R \rightarrow A$, mais de manière non-unique. C'est le principal désavantage des enveloppes par rapport aux représentants : ils donnent lieu à des descriptions non-unique/non-canoniques des déformations.

Continuons en présentant une catégorie particulière de surjections, qu'on peut voir comme des « surjections infinitésimales » (en cela qu'elles ressemblent à $k[\varepsilon] \rightarrow k$) et qui permettront d'énoncer le critère de SCHLESSINGER :

Définition 25 (petite extension). Soit une surjection $p \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^0}(B, A)$. On dit que p est une petite extension lorsque son noyau est un idéal principal non-nul (t) de B et si, en notant \mathfrak{m}_B l'idéal maximal de B , on a $\mathfrak{m}_B t = 0$.

Cette définition permet de « découper les surjections en parties plus simples », comme le montre ce lemme :

Lemme 26. *Tout morphisme surjectif de \mathcal{C}^0 s'écrit comme une composition de petites extensions.*

Preuve. Soit $p : B \rightarrow A$ un morphisme surjectif de \mathcal{C}^0 . Soit \mathfrak{m}_B l'idéal maximal de B . Soit I l'idéal $\ker(p)$ de B . L'anneau B étant artinien, on a $\mathfrak{m}_B^N = 0$ pour un entier N qu'on fixe définitivement.

On peut alors écrire :

$$B = B/(\mathfrak{m}_B^N I) \rightarrow B/(\mathfrak{m}_B^{N-1} I) \rightarrow \dots \rightarrow B/(\mathfrak{m}_B I) \rightarrow B/I \simeq A$$

Posons $B_i = B/(\mathfrak{m}_B^i I)$ et intéressons-nous à la surjection $B_{i+1} \rightarrow B_i$. Son noyau est un idéal J_{i+1} de B_{i+1} . Si on prend $j \in J_{i+1}$ et $m \in \mathfrak{m}_B$, il apparaît que $mj \in \mathfrak{m}_B \mathfrak{m}_B^i = \mathfrak{m}_B^{i+1}$ et donc $mj = 0$ dans B_i .

Puisque B_{i+1} est noethérien, J_{i+1} s'écrit $(t_{i,0}, t_{i,1}, \dots, t_{i,r_i})$. On a alors :

$$B_{i+1} \rightarrow B_{i+1}/(t_{i,0}) \rightarrow B_{i+1}/(t_{i,0}, t_{i,1}) \rightarrow \dots \rightarrow B_{i+1}/(t_{i,0}, t_{i,1}, \dots, t_{i,r_i}) = B_{i+1}/J_{i+1} \simeq B_i$$

Ne reste qu'à montrer que $B_{i+1}/(t_{i,0}, t_{i,1}, \dots, t_{i,j-1}) \rightarrow B_{i+1}/(t_{i,0}, t_{i,1}, \dots, t_{i,j-1}, t_{i,j})$ est une petite extension. Or son noyau est engendré par $t_{i,j}$, qui annule bien $\mathfrak{m}_B/(t_{i,0}, t_{i,1}, \dots, t_{i,j-1})$ vu ce qu'on a dit avant. \square

Ce résultat est particulièrement intéressant ⁶ pour faciliter la vérification des hypothèses du critère de GROTHENDIECK, puisqu'on peut essayer de vérifier l'isomorphisme du foncteur $F(A \times_C B) \rightarrow F(A) \times_{F(C)} F(B)$ par une sorte d'induction, en partant de k et en remontant « petite extension par petite extension » le long des surjections $A, B \twoheadrightarrow k$. C'est toute l'idée du critère de SCHLESSINGER, qui formalise cette idée en donnant de plus des critères d'existence d'une enveloppe :

Théorème 27 (critère de SCHLESSINGER). *Soit $F : \mathcal{C}^0 \rightarrow \mathbf{Set}$ un foncteur. On suppose que $F(k)$ est un singleton. Considérons le morphisme canonique*

$$F\left(A \times_C B\right) \rightarrow F(A) \times_{F(C)} F(B)$$

associé à un couple de morphismes $A \rightarrow C, B \rightarrow C$ dans \mathcal{C}^0 . Alors :

1. *F a une enveloppe si et seulement si :*
 - *Ce morphisme est surjectif lorsque $B \rightarrow C$ est une petite extension.*
 - *Ce morphisme est bijectif lorsque $C = k$ et $B = k[\varepsilon]$*
 - *Le k -espace vectoriel $t_F = F(k[\varepsilon])$ est de dimension finie (ce qui a un sens lorsque la condition précédente est satisfaite).*
2. *F est pro-représentable si et seulement si, de plus, ce morphisme est un isomorphisme lorsque $A = B$ et que $A \rightarrow C$ est une petite extension.*

Preuve. Nous gardons la preuve pour plus tard (section 1.5), pour la clarté de l'exposition.

Pour illustrer un peu les méthodes de preuve, voyons quand même en quoi la dernière condition permet de passer d'une enveloppe à un pro-représentant (sachant que la pro-représentabilité implique évidemment toutes les hypothèses du critères). On suppose que F a une enveloppe R et que la dernière hypothèse est satisfaite.

On doit montrer que pour tout A , il y a un isomorphisme entre $\mathrm{Hom}(R, A)$ et $F(A)$. Comme annoncé, on va procéder par récurrence, petite extension par petite extension, en découpant la surjection $A \twoheadrightarrow k$:

- Pour $A = k$, c'est clair : $F(k)$ est réduit à un singleton, tout comme $\mathrm{Hom}(R, k)$ qui est réduit à un singleton (le quotient par l'idéal maximal).
- Supposons que $\mathrm{Hom}(R, B) \simeq F(B)$ et que $p : A \twoheadrightarrow B$ soit une petite extension. On a $B \simeq A / \ker(p)$ et $\ker(p) = (t)$ avec $t\mathfrak{m}_A = 0$.

On a aussi :

$$A \times_B A \simeq A \times_k k[t]$$

par l'isomorphisme $(x, y) \mapsto (x, \bar{x} + y - x)$ (où \bar{x} est l'image dans k de x , et où $y - x \in \ker(p) = (t)$ car y et x ont même image dans B) (on reverra cet isomorphisme dans la sous-section 1.5.2, en le détaillant un peu plus).

⁶ La propriété précédente, qui utilise le caractère artinien des anneaux, justifie en grande partie le choix de parler de pro-représentabilité dans \mathcal{C}^0 au lieu de représentabilité dans \mathcal{C} .

On a vu (sous-section 1.3.1) que $F(k[t]) = t_F \otimes (t)$. On a alors (en utilisant la deuxième hypothèse du critère de SCHLESSINGER) :

$$F(A) \times_{F(B)} F(A) \simeq F \left(A \times_B A \right) \simeq F \left(A \times_k k[t] \right) \simeq F(A) \times (t_F \otimes (t))$$

Cet isomorphisme permet de définir une action de $t_F \otimes (t)$ sur $F(A)$: pour un élément $\delta \in (t_F \otimes (t))$ et $\rho \in F(A)$, on regarde l'élément de $F(A) \times_{F(B)} F(A)$ associé au couple (ρ, δ) et on récupère sa deuxième coordonnée, qui est un nouvel élément de $F(A)$.

Une propriété intéressante de cette action est qu'elle conserve l'image dans $F(B)$: il s'agit donc d'une action sur chaque fibre $F(p)^{-1}(b)$ (pour $b \in F(B)$). Moralement, on a paramétré par $t_F \otimes (t)$ les différentes déformations à A qui induisent une même déformation sur B . Puisqu'on a l'isomorphisme écrit plus haut, cette action est libre et transitive.

Puisque $h_R = \text{Hom}(R, -)$ vérifie toutes les hypothèses qu'on vient d'utiliser pour F , il y a également une action libre et transitive de $t_F \otimes (t)$ sur les fibres $h_R(p)^{-1}(b)$ pour $b \in h_R(B)$.

C'est là qu'on utilise l'hypothèse de récurrence : puisque $F(B)$ est isomorphe à $h_R(B)$, on peut définir une action de $t_F \otimes (t)$ sur $h_R(p)^{-1}(\tilde{b})$ pour tout $b \in F(B)$, où \tilde{b} est l'image dans $h_R(B)$ de b . Cette action, comme celle de F , est libre et transitive.

Ce qu'on doit faire, c'est montrer que pour tout $b \in F(B)$, on a un isomorphisme entre $h_R(p)^{-1}(\tilde{b})$ et $F(p)^{-1}(b)$. Puisque $h_R(A) = \bigsqcup_{b \in F(B)} h_R(p)^{-1}(\tilde{b})$ et $F(A) = \bigsqcup_{b \in F(B)} F(p)^{-1}(b)$, ces isomorphismes entre les fibres fourniront le résultat désiré.

Par hypothèse, R est une enveloppe de F , et il y a donc une application

$$\Phi_A : h_R(A) \rightarrow F(A)$$

surjective, et induisant des surjections $\Phi_{A,b} : h_R(p)^{-1}(\tilde{b}) \rightarrow F(p)^{-1}(b)$ sur chaque fibre (grâce à la propriété de transformation naturelle). De plus, la définition de l'action de $t_F \otimes (t)$ étant naturelle, l'action sur $h_R(p)^{-1}(\tilde{b})$ est envoyée par $\Phi_{A,b}$ sur l'action sur $F(p)^{-1}(b)$.

Soit $b \in F(B)$. Supposons que $h_R(p)^{-1}(\tilde{b}) \rightarrow F(p)^{-1}(b)$ ne soit pas injective. Soit $x, y \in h_R(p)^{-1}(\tilde{b})$ distincts de même image $z \in F(p)^{-1}(b)$. Par transitivité de l'action, il existe $\lambda \in t_F \otimes (t)$ tel que $y = \lambda \cdot x$ et $\lambda \neq 1$. Mais alors, en appliquant $\Phi_{A,b}$, on apprend que $z = \lambda \cdot z$, ce qui contredit le caractère libre de l'action.

On a ainsi montré que Φ_A était bijective, ce qui prouve le résultat.

□

1.4 Existence d'un anneau de déformation (uni)versel

À l'aide du critère précédent, il devient beaucoup plus simple d'étudier la question de la pro-représentabilité du foncteur des déformations, ou à défaut de l'existence d'une



$$\chi : G_K \mapsto \mathbb{Z}_p^\times$$

FIGURE 1.1 – Attention à ne pas confondre : à gauche, une représentation d’un groupe de gaulois irréductibles ; à droite, une représentation d’un groupe de GALOIS irréductible.

enveloppe.

On aura besoin pour cela de distinguer les représentations absolument irréductibles :

Définition 28 (représentation absolument irréductible). Une représentation $G \rightarrow \text{Aut}(V)$ est irréductible lorsque le k -espace vectoriel V n’a pas de sous-espaces G -invariants autres que V et 0 . Elle est dite absolument irréductible lorsque $V \otimes_k \bar{k}$ n’a pas non plus de sous-espaces invariants non-triviaux pour l’action de G définie par $g.(x \otimes y) = (g.x) \otimes y$.

La condition d’absolue irréductibilité revient à demander à ce que, vue dans toute extension algébrique de k , V soit irréductible. Voici un exemple de représentation irréductible non absolument irréductible :

Exemple 29. Soit le morphisme $\rho : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow GL_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ défini par :

$$\rho(0) = I_2 \quad \rho(1) = J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \rho(2) = -I_2 \quad \rho(3) = -J$$

Un sous-espace non-trivial de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}^2$ stable sous l’action de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ est forcément une droite. La droite de générateur $(a, b) \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}^2$ est stabilisée par J (et donc par toute l’action) si et seulement s’il existe $\lambda \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ tel que $\lambda a = b$ et $\lambda b = -a$, donc $a = -\lambda^2 a$. Si $a = 0$, alors $b = 0$ et ce n’est pas une droite ; sinon $\lambda^2 = -1$. Mais -1 n’est pas un carré dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Donc ρ est une représentation irréductible.

En revanche, dans $\overline{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}$, J a nécessairement une valeur propre (les racines carrées de -1), et donc il existe une droite stabilisée par l’action de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. La représentation ρ n’est donc pas absolument irréductible.

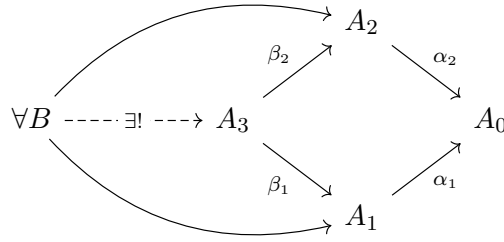
1.4.1 Preuve de l’existence d’une déformation (uni)verselle

On a le théorème suivant, dû à MAZUR, qui résout la question de l’existence des déformations (uni)verselles :

Théorème 30. Soit une représentation résiduelle $\bar{\rho} : G \rightarrow GL_n(k)$, où G est un groupe profini vérifiant la condition Φ_p . Alors le foncteur des déformations $D_{\bar{\rho}}$ admet une enveloppe, et il est même pro-représentable lorsque $\bar{\rho}$ est absolument irréductible.

Preuve. On suit ici la preuve de [Maz89] (pages 388 à 391), qui est aussi celle que propose [Lac16].

Déjà, $D_{\bar{\rho}}(k)$ est limité à la représentation résiduelle (ou plutôt à sa classe d'équivalence stricte, qui ne contient qu'elle), et ne contient donc qu'un élément. On est donc dans le cadre du critère de SCHLESSINGER, dont on va pouvoir essayer de vérifier les hypothèses. Soit donc $A_0, A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{C}^0$ avec $A_3 = A_1 \times_{A_0} A_2$, c'est-à-dire qu'on a le diagramme suivant :



Et on définit, pour tout $i \in \{0, 1, 2, 3\}$:

$$E_i = \left\{ \begin{array}{c} \rho \in \text{Hom}_{\mathbb{C}^0}(G, GL_n(A_i)) \end{array} \middle| \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & & GL_n(A_i) \\ & \nearrow \rho & \downarrow \\ G & \xrightarrow{\bar{\rho}} & GL_n(k) \end{array} \end{array} \right\}$$

$$G_i = \ker(GL_n(A_i) \rightarrow GL_n(k))$$

De sorte qu'on ait, pour l'action par conjugaison de G_i sur E_i :

$$D(A_i) = E_i/G_i$$

Le morphisme auquel on s'intéresse est donc

$$\varphi : E_3/G_3 \rightarrow E_1/G_1 \times_{E_0/G_0} E_2/G_2$$

On montre d'abord un lemme :

Lemme 31. Soit π_2 un élément de E_2 et π_0 son image dans E_0 . On définit, pour $i \in \{0, 2\}$:

$$G_i(\pi_i) = \{M \in G_i \mid M\pi_i = \pi_i M\}$$

Si l'application $G_2(\pi_2) \rightarrow G_0(\pi_0)$ est surjective pour tout π_2 , alors φ est injectif.

Preuve. Soit $\rho_3, \rho'_3 \in E_3$ tels que $\varphi([\rho_3]) = \varphi([\rho'_3]) = ([\rho_1], [\rho_2])$, avec $\rho_1 = \beta_1(\rho_3)$, $\rho_2 = \beta_2(\rho_3)$. On note $\rho_0 = \alpha_1(\rho_1) = \alpha_2(\rho_2)$ et $\rho'_0 = \alpha_1(\beta_1(\rho'_3)) = \alpha_2(\beta_2(\rho'_3))$.

Alors on sait qu'il existe $M_1 \in G_1, M_2 \in G_2$ telles que :

$$\begin{aligned}\beta_1(\rho'_3) &= M_1\rho_1M_1^{-1} \\ \beta_2(\rho'_3) &= M_2\rho_2M_2^{-1}\end{aligned}$$

soit $N_1 = \alpha_1(M_1) \in G_0$ et $N_2 = \alpha_2(M_2) \in G_0$.

On a :

$$\begin{aligned}\rho'_0 &= \alpha_1(\beta_1(\rho'_3)) = N_1\alpha_1(\rho_1)N_1^{-1} = N_1\rho_0N_1^{-1} \\ &= \alpha_2(\beta_2(\rho'_3)) = N_2\alpha_2(\rho_2)N_2^{-1} = N_2\rho_0N_2^{-1}\end{aligned}$$

Donc $N_2^{-1}N_1 \in G_0$ commute avec ρ_0 , autrement dit $N_2^{-1}N_1 \in G_0(\rho_0)$.

Par hypothèse, il existe $P \in G_2$ tel que P commute avec ρ_2 et que $\alpha_2(P) = N_2^{-1}N_1$.

Vérifions que (M_1, M_2P) définit un élément M_3 de $G_3 = G_1 \times_{G_0} G_2$: il suffit de savoir que leur image dans G_0 est la même. Or $\alpha_2(M_2P) = N_2N_2^{-1}N_1 = N_1 = \alpha_1(M_1)$.

Il est alors clair que $M_3\rho_3M_3^{-1} = \rho'_3$ (coordonnée par coordonnée, cela vient de ce que $M_1\rho_1M_1^{-1} = \rho'_1$ et $M_2P\rho_2P^{-1}M_2^{-1} = M_2\rho_2PP^{-1}M_2^{-1} = M_2\rho_2M_2^{-1} = \rho'_2$). Ainsi dans E_3/G_3 :

$$[\rho_3] = [\rho'_3]$$

C'est-à-dire qu'on a montré l'injectivité de φ . □

— **Première étape :** Supposons que $\alpha_2 : A_2 \rightarrow A_0$ soit une petite extension, et tentons de montrer que φ est surjectif.

Soit un élément de $E_1/G_1 \times_{E_0/G_0} E_2/G_2$, on peut l'écrire comme un couple $([\rho_1], [\rho_2])$, ρ_1 étant un représentant d'une déformation dans A_1 et ρ_2 d'une déformation dans A_2 , les deux induisant la même déformation dans A_0 .

$$\begin{array}{ccc} & GL_n(A_1) & \xrightarrow{\alpha_1} & GL_n(A_0) \\ & \nearrow \rho_1 & & \uparrow \text{conj}_M \\ G & & & \\ & \searrow \rho_2 & & \uparrow \\ & GL_n(A_2) & \xrightarrow{\alpha_2} & GL_n(A_0) \end{array}$$


où on a étendu α_1 et α_2 aux matrices par functorialité de GL_n (i.e. coefficient par coefficient), et où conj_M est l'isomorphisme donné par la conjugaison par une matrice $M \in G_0$.

Soit $M_2 \in \mathfrak{M}_n(A_0)$ une matrice dont les coefficients sont des images réciproques arbitraires par α_2 des coefficients de M , ce qu'on peut faire puisque α_2 est surjectif. Soit de même M_2^Δ définie comme un représentant de M^{-1} . Soit $N = M_2M_2^\Delta - I_n$.

Alors $\alpha_2(N) = MM^{-1} - I_n = 0$, donc N a ses coefficients dans l'idéal $\ker(\alpha_2)$ de A_2 . Notons \mathfrak{m}_2 l'idéal maximal de A_2 . Puisque α_2 est une petite extension, on a $\ker(\alpha_2) = (t)$ avec $t \neq 0$ et $\mathfrak{m}_2 t = 0$. Ainsi $N = tN'$ où $N' \in \mathfrak{M}_n(A_2)$.

$I_n + tN'$ est inversible d'inverse $M_2^{\bar{E}} = I^n - tN'$ (car $t^2 = 0$). On remarque alors que $M_2 M_2^{\Delta} M_2^{\bar{E}} = (I_n + N)(I_n + N)^{-1} = I_n$. Ainsi $M_2^{\Delta} M_2^{\bar{E}}$ est un inverse de M_2 , d'où $M_2 \in GL_n(A_2)$.

Par définition de G_0 , l'image de M dans $GL_n(k)$ est égale à I_n . On a

$$GL_n(A_2) \xrightarrow{\alpha_2} GL_n(A_0) \longrightarrow GL_n(k)$$


ce qui signifie que l'image de M_2 dans $GL_n(k)$ est la même que celle de M , à savoir I_n . Ainsi, $M_2 \in G_2$.

On a donc :

$$\begin{aligned} \alpha_1(\rho_1) &= \text{conj}_M \circ GL_n(\alpha_2) \circ \rho_2 \\ &= \alpha_2(M_2) \alpha_2(\rho_2) \alpha_2(M_2)^{-1} \\ &= \alpha_2(M_2 \rho_2 M_2^{-1}) \end{aligned}$$

Ce qui implique que $\rho_1 \in E_1$ et $M_2 \rho_2 M_2^{-1} \in E_2$ ont même image dans E_0 et $(\rho_1, M_2 \rho_2 M_2^{-1})$ correspond donc à un élément ρ_3 de $E_1 \times_{E_0} E_2$, c'est-à-dire de E_3 .

La projection $[\rho_3]$ de ρ_3 dans E_3/G_3 donne un antécédent de $([\rho_1], [\rho_2])$ par φ , qui est donc bien surjectif.

- **Deuxième étape** : Supposons $A_0 = k$ et $A_2 = k[\varepsilon]$. Montrons que φ est alors bijectif. Déjà, puisque $k[\varepsilon] \rightarrow k$ est une petite extension (c'est un morphisme surjectif de noyau (ε) , et $\varepsilon(\varepsilon) = (\varepsilon^2) = 0$), la preuve de la première étape montre que φ est surjectif. Reste à montrer qu'il est injectif. Pour cela, on va se ramener au lemme précédent : il suffit de montrer que pour tout $x_2 \in A_2$ d'image $x_0 = \alpha_2(x_2) \in A_0$, et pour toute matrice $M_0 \in G_0$ qui commute avec x_0 , il existe une matrice $M_2 \in G_2$ qui commute avec x_2 . Dans le cas présent, G_0 étant réduit à $\{I_n\}$ puisque $A_0 = k$, la matrice $I_n \in G_2$ conviendra toujours comme relèvement commutant avec x_2 .
- **Troisième étape** : Il faut montrer que $t_D := D_{\bar{\rho}}(k[\varepsilon])$ est de dimension finie. Cela repose principalement sur la condition Φ_p et sur l'égalité suivante (remarquable : elle établit un premier lien entre cohomologie galoisienne et étude des déformations!) :

$$t_D \simeq H^1(G, \mathfrak{M}_n(k))$$

où l'action de G sur $\mathfrak{M}_n(k)$ est définie par $g.M = \bar{\rho}(g)M\bar{\rho}(g)^{-1}$ et où la cohomologie est prise au sens de la cohomologie des groupes (pour une introduction rapide à la cohomologie des groupes, voir [AW67]).

- Soit un relèvement $\rho : G \rightarrow GL_n(k[\varepsilon])$ de $\bar{\rho}$ à $k[\varepsilon]$. Alors, pour tout $g \in G$, on a : $\rho(g) = [I_n + \varepsilon u(g)]\bar{\rho}(g)$ pour une certaine matrice $u \in \mathfrak{M}_n(k)$.
 Montrons que l'application $u : G \rightarrow \mathfrak{M}_n(k)$ est un cocycle :

$$\begin{aligned} \rho(gg') &= [\bar{\rho}(g) + \varepsilon u(g)\bar{\rho}(g)][\bar{\rho}(g') + \varepsilon u(g')\bar{\rho}(g')] \\ &= \bar{\rho}(gg') + \varepsilon[u(g)\bar{\rho}(gg') + \bar{\rho}(g)u(g')\bar{\rho}(g')] \\ &= [I_n + \varepsilon(u(g) + \bar{\rho}(g)u(g')\bar{\rho}(g)^{-1})]\bar{\rho}(gg') \end{aligned}$$

Cela montre que $u(gg') = u(g) + g.u(g')$, donc u est un cocycle.

De plus, un élément l de $\Gamma_n(k[\varepsilon])$ se met sous la forme $I_n + \varepsilon M$ avec $M \in \mathfrak{M}_n(k)$, et l'effet de son action par conjugaison sur ρ s'écrit, en termes de u :

$$\begin{aligned} l\rho(g)l^{-1} &= l\bar{\rho}(g)l^{-1} + \varepsilon lu(g)\bar{\rho}(g)l^{-1} \\ &= \bar{\rho}(g) + \varepsilon(M\bar{\rho}(g) - \bar{\rho}(g)M) + \varepsilon u(g)\bar{\rho}(g) + \varepsilon^2(\dots) \\ &= [I_n + \varepsilon(M - \bar{\rho}(g)M\bar{\rho}(g)^{-1} + u(g))]\bar{\rho}(g) \\ &= [I_n + \varepsilon(M - \bar{\rho}(g).M + u(g))]\bar{\rho}(g) \end{aligned}$$

Donc le u associé à $l\rho(g)l^{-1}$ est égal au u associé à ρ , auquel on ajoute $M - \bar{\rho}(g).M$: la conjugaison par des éléments de $\Gamma_n(k[\varepsilon])$ correspond donc bien à l'addition de cobords.

Les mêmes calculs (essentiellement, menés dans l'autre sens) montrent que réciproquement un cobord correspond à un élément de $\Gamma_n(k[\varepsilon])$, et qu'un cocycle correspond à un relèvement $G \rightarrow GL_n(k[\varepsilon])$ de $\bar{\rho}$. Puisque $t_D = D_{\bar{\rho}}(k[\varepsilon])$ est le quotient des relèvements de $\bar{\rho}$ à $k[\varepsilon]$ par les éléments de $\Gamma_n(k[\varepsilon])$, il est isomorphe au quotient des 1-cocycles par les 1-cobords, c'est-à-dire que :

$$t_{\bar{\rho}} \simeq H^1(G, \mathfrak{M}_n(k))$$

(On vérifie facilement que la structure d'espace vectoriel obtenue est la même)

- Reste à montrer que $H^1(G, \mathfrak{M}_n(k))$ est de dimension finie. En posant G_0 le noyau de $\bar{\rho}$, on a la suite exacte de restriction-inflation :

$$0 \longrightarrow H^1(G/G_0, (\mathfrak{M}_n(k))^{G_0}) \xrightarrow{\text{Inf}} H^1(G, \mathfrak{M}_n(k)) \xrightarrow{\text{Res}} H^1(G_0, \mathfrak{M}_n(k))$$

Par définition de G_0 (comme noyau de $\bar{\rho}$), l'action de G_0 sur $\mathfrak{M}_n(k)$ est triviale, et donc :

$$H^1(G_0, \mathfrak{M}_n(k)) \simeq \text{Hom}(G_0, \mathfrak{M}_n(k)) \simeq \text{Hom}(G_0, k)^{n^2}$$

$$H^1(G/G_0, (\mathfrak{M}_n(k))^{G_0}) \simeq H^1(G/G_0, \mathfrak{M}_n(k))$$

D'abord, puisque k est de caractéristique p , c'est un \mathbb{F}_p -espace vectoriel : si on en choisit une base $B = \{b_j\}$ avec $b_0 = 1$, on voit qu'un morphisme $G_0 \rightarrow k$ est la même chose qu'un morphisme $G_0 \rightarrow \mathbb{F}_p$ pour chaque élément de B . Puisque G vérifie la condition Φ_p , $\text{Hom}(G_0, \mathbb{F}_p)$ est de cardinal fini. Notons ses éléments μ_1, \dots, μ_r . Alors $\{b_j \mu_i\}$ est une \mathbb{F}_p -base de $\text{Hom}(G_0, k)$, et donc une k -famille génératrice de $\text{Hom}(G_0, k)$. Puisque dans k on a $b_j \mu_i = b_j(b_0 \mu_i)$, $\{b_0 \mu_i\}$ est une famille génératrice finie du k -espace vectoriel $\text{Hom}(G_0, k)$, qui est donc de dimension finie sur k .

Puisque G est un groupe profini, il est compact. De plus $G_0 = \ker(p) = p^{-1}(\{0\})$ est un sous-groupe ouvert de G . Si on choisit des représentants (q_i) des classes de G/G_0 , on a :

$$G = \bigsqcup_i q_i G_0$$

c'est-à-dire qu'on a un recouvrement de G par des ouverts non vides, qui est nécessairement fini. Ainsi, G/G_0 est fini. Puisque $\mathfrak{M}_n(k)$ est de dimension finie sur k , $H^1(G/G_0, \mathfrak{M}_n(k))$ est donc de dimension finie sur k .

De la suite exacte de restriction-inflation écrite plus haut, on déduit alors que $H^1(G, \mathfrak{M}_n(k))$ est de dimension finie sur k .

De ce qui précède, on déduit que $t_D \simeq H^1(G, \mathfrak{M}_n(k))$ est de dimension finie sur k .

- **Quatrième étape** : Il faut montrer que si $\bar{\rho}$ est absolument irréductible, que $A_1 = A_2$ et que $\alpha_2 : A_2 \rightarrow A_0$ est une petite extension, alors φ est un isomorphisme. Le fait que φ soit surjectif résulte immédiatement de la première étape, il ne reste qu'à montrer son injectivité. On va à nouveau se ramener au lemme précédent.

Pour un anneau $A \in \mathcal{C}^0$ et une représentation $\rho_A : G \rightarrow GL_n(A)$, notons $C_A(\rho_A)$ l'ensemble des matrices de $\mathfrak{M}_n(A)$ commutant avec $\rho_A(g)$ pour tout $g \in G$. On va montrer que $C_A(\rho_A) \simeq A$ (c'est-à-dire que toutes ces matrices sont scalaires). On procède par étapes en prouvant quelques lemmes :

Lemme 32. *On a :*

$$C_k(\bar{\rho}) = k$$

D'ailleurs, cette propriété, plus faible que l'absolue irréductibilité, suffit à achever la démonstration : c'est donc une condition suffisante pour l'existence d'une déformation universelle.

Preuve. C'est essentiellement le lemme de SCHUR. Détaillons rapidement : soit $P \in C_k(\bar{\rho})$, on regarde P comme une matrice de $\mathfrak{M}_n(\bar{k})$. Alors P a une valeur propre $\lambda \in \bar{k}$. Si on écrit $P' = P - \lambda I_n$, on a toujours $P' \bar{\rho}(g) = \bar{\rho}(g) P'$ et de plus $\ker(P') \neq 0$. Or $\ker(P')$ est stable par $\bar{\rho}(g)$ (si $P'(x) = 0$, alors $P'(\bar{\rho}(g)(x)) = \bar{\rho}(g)(P'(x)) = 0$),

qui est irréductible sur \bar{k} (car elle est absolument irréductible). Donc $\ker(P') = k^n$, soit $P' = 0$ et donc $P = \lambda I_n$. \square

Lemme 33. *Si $B \rightarrow A$ est une petite extension, et si $C_A(\rho_A) \simeq A$, alors $C_B(\rho_B) \simeq B$.*

Preuve. Soit $(t) = \ker(B \rightarrow A)$, avec $t\mathfrak{m}_B = 0$ (où \mathfrak{m}_B est l'idéal maximal de B). Soit $M_B \in C_B(\rho_B)$.

Soit M_A la matrice image de M_B par $B \rightarrow A$. Par hypothèse, puisque $M_A \in C_A(\rho_A)$ on a $M_A = \lambda I_n$. Soit $\tilde{\lambda}$ un antécédent quelconque de λ par la surjection $B \rightarrow A$ et $N_B = M_B - \tilde{\lambda} I_n$. Alors N_B a ses coefficients dans $\ker(B \rightarrow A) = (t)$ et on peut donc écrire $N_B = tN'_B$. On vérifie que N'_B est dans $C_B(\rho_B)$, et son image $\mathfrak{M}_n(k)$ est donc (puisque $C_k(\bar{\rho}) = k$) une matrice de la forme aI_n . En choisissant un élément $\tilde{a} \in B$ d'image a dans k , on peut alors dire que $N'_B = \tilde{a} I_n + U$, où U est à coefficients dans \mathfrak{m}_B , et donc $tU = 0$. Mais alors :

$$M_B = \tilde{\lambda} I_n + t(\tilde{a} I_n + U) = (\tilde{\lambda} + t\tilde{a}) I_n + tU = (\tilde{\lambda} + t\tilde{a}) I_n$$

est une matrice scalaire. \square

De ces lemmes, on déduit immédiatement comme annoncé que pour tout $A \in \mathcal{C}$, on a $C_A(\rho_A) \simeq A$, puisque la surjection $A \rightarrow k$ s'écrit comme une composition de petites extensions.

Soit un élément $x_2 \in E_2$ d'image $x_0 = \alpha_2(x_2) \in E_0$, et une matrice $M_0 \in G_0$ qui commute avec $x_0(g)$ pour tout $g \in G$. Il nous faut montrer qu'il existe une matrice $M_2 \in G_2$ d'image M_0 par α_2 qui commute avec $x_2(g)$ pour tout $g \in G$. On sait que $M_0 \in C_{A_0}(x_0)$ et donc $M_0 = \tilde{\lambda} I_n$ avec $\tilde{\lambda} \in A_0$ d'image 1 dans k . Soit enfin λ un relèvement arbitraire $\tilde{\lambda}$ de λ dans A_2 , alors $\lambda I_n \in G_2$ vérifie la condition. \square

Exemple 34. Voici quelques exemples :

- Une représentation de dimension 1 (un caractère, par exemple le caractère cyclotomique dans le cas des corps p -adiques) est toujours absolument irréductible, il lui correspond donc un anneau de déformation universel. En fait, cet anneau ne dépend pas du caractère ; on le calculera dans la sous-section 2.1.1.
- La condition d'absolue irréductibilité n'est pas nécessaire : quoi qu'elle ne soit pas du tout absolument irréductible (pour $n \geq 2$) car elle fixe tous les sous-espaces, la représentation triviale $\bar{\rho}_{\text{triv}} : g \in G \mapsto I_n \in GL_n(k)$ possède bien un anneau de déformation universel. En effet, il suffit de reprendre la preuve d'existence et de remarquer que toutes les conditions de commutation sont trivialement vérifiées : avec les notations de la preuve, n'importe quelle matrice M_2 d'image M_0 par α_2 (qui est surjectif) convient pour finir la démonstration.

Une représentation $G \rightarrow GL_n(A)$ induit la représentation triviale dans $GL_n(k)$ si et seulement si elle est à valeurs dans $\Gamma_n(A)$. On peut donc décrire $D(A)$ comme les classes de $\text{Hom}(G, \Gamma_n(A))$ pour la conjugaison par un élément de $\Gamma_n(A)$. L'anneau de déformation universel associé a été assez largement étudié (notamment lorsque G est le groupe de GALOIS absolu d'un corps local p -adique) et est l'objet de conjectures diverses⁷. On peut regarder [Iye19] ou [Con09] (Lecture 3) pour des exemples de résultats.

1.4.2 Cas des représentations galoisiennes

La situation précédente, qui prend en compte le caractère profini des groupes considérés et la condition Φ_p , est taillée sur mesure pour s'appliquer au cas où G est soit G_K soit $G_{K,S}$.

Puisque les déformations des représentations galoisiennes apparaissent naturellement, par exemple dans l'étude des courbes elliptiques ou des formes modulaires, l'existence d'une déformation (uni)verselle est particulièrement intéressante pour les applications dans ces domaines. Des motivations plus précises pour l'application de cette théorie spécifiquement aux représentations galoisiennes se trouvent dans [Maz97] (p.259).

1.5 Preuve du critère de SCHLESSINGER

1.5.1 Un peu de théorie des foncteurs $\mathcal{C}^0 \rightarrow \text{Set}$

Lemme 35. *Soit $B, A \in \mathcal{C}$ et un morphisme $p : B \rightarrow A$. Alors p est surjectif si et seulement si l'application linéaire $d^*p : t_B^* \rightarrow t_A^*$ induite par p est surjective.*

Preuve. Si p est surjectif, alors d^*p est évidemment surjective. Supposons d^*p surjective.

Montrons que pour tout $n \geq 0$, le morphisme $p_{(n)} : \mathfrak{m}_A^n / \mathfrak{m}_A^{n+1} \rightarrow \mathfrak{m}_B^n / \mathfrak{m}_B^{n+1}$ est surjectif :

- Pour $n = 0$, cela provient de ce que p est un morphisme de \mathcal{C} et induit donc l'identité sur les corps résiduels ;
- Pour $n \geq 1$, on procède par récurrence en supposant que $p_{(n-1)}$ est surjective. Soit $y \in \mathfrak{m}_B^n$. Il suffit de considérer le cas où $y = y_0 y'$ avec $y_0 \in \mathfrak{m}_B^{n-1}$ et $y' \in \mathfrak{m}_B$ (tout élément de \mathfrak{m}_B^n est somme de tels éléments).

Puisque d^*p est surjective, il existe $x' \in \mathfrak{m}_A$ tel que $p(x') = y'$ modulo \mathfrak{m}_B^2 , autrement dit $y' - p(x')$ est dans \mathfrak{m}_B^2 . De plus, par hypothèse de récurrence, il existe $x_0 \in \mathfrak{m}_A^{n-1}$ tel que $y_0 - p(x_0)$ soit dans \mathfrak{m}_B^n . On calcule alors :

⁷. Il est assez intimidant de voir qu'on peine à décrire l'anneau de déformation associé à ce qui devrait être la plus simple des représentations !

$$\begin{aligned}
y - p(x_0x') &= y_0y' - p(x_0)p(x') \\
&= (p(x_0) + y_0 - p(x_0))(p(x') + y' - p(x')) - p(x_0)p(x') \\
&= p(x_0)(y' - p(x')) + p(x')(y_0 - p(x_0)) + (y_0 - p(x_0))(y' - p(x')) \\
&\in \mathfrak{m}_B^{n-1}\mathfrak{m}_B^2 + \mathfrak{m}_B\mathfrak{m}_B^n + \mathfrak{m}_B^n\mathfrak{m}_B^2 \\
&\in \mathfrak{m}_B^{n+1}
\end{aligned}$$

et donc x_0x' est un antécédent de y par $p_{(n)}$.

Soit $y \in B$ non nul. On va construire par récurrence une suite d'éléments $(x_k) \in A$ tels que $x_k = x_{k+1}$ modulo \mathfrak{m}_A^k et $p(x_k) = y$ modulo \mathfrak{m}_B^k . Par complétude de A et continuité de p , la suite x_k aura une limite $x \in A$ d'image y . On aura ainsi montré la surjectivité de p .

Pour x_0 , on choisit 1. Supposons désormais x_0, \dots, x_k construits. Alors $y - p(x_k)$ appartient à \mathfrak{m}_B^k . Vu ce qu'on vient de dire, il existe un $t_k \in \mathfrak{m}_A^k$ tel que $p(t_k) = y - p(x_k)$ modulo \mathfrak{m}_B^{k+1} . On définit alors $x_{k+1} = x_k + t_k$. \square

Définition 36 (surjection essentielle). Une surjection $p \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ est *essentielle* si tout morphisme $q \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, B)$ tel que $p \circ q$ soit surjectif est surjectif.

Lemme 37. Une surjection $p : B \rightarrow A$ est essentielle si et seulement si $d^*p : t_B^* \rightarrow t_A^*$ est un isomorphisme.

Preuve. Supposons que d^*p soit un isomorphisme. Soit une surjection $q : C \rightarrow B$ telle que $p \circ q$ soit surjective. Alors $d^*(p \circ q)$ est une surjection, d'après le lemme précédent. Mais alors $d^*q = (d^*p)^{-1} \circ d^*(p \circ q)$ est surjective, et donc d'après le même lemme q est surjective.

Réciproquement, supposons p essentielle. Soit t_1, \dots, t_r des éléments de \mathfrak{m}_B dont les images (obtenues par application de p puis projection) dans t_A^* (qui est bien de dimension finie) forment une base. On définit $C = W(k)[t_1, \dots, t_r]$, qui est une sous-algèbre de B . Par définition des t_i , l'espace tangent à C est envoyé surjectivement par d^*p sur celui de A , et donc la restriction de p à C est surjective. Autrement dit, si on note i l'injection $C \rightarrow B$, on a $p \circ i$ surjective. Puisque p est supposée essentielle, i est surjective et donc $B = C$. On en déduit que $\dim t_B^* = \dim t_C^* \leq r = \dim t_A^*$. Puisque p est surjective, l'application linéaire $d^*p : t_B^* \rightarrow t_A^*$ est surjective et, vu l'inégalité précédente entre les dimensions, c'est même un isomorphisme. \square

Lemme 38. Soit $p : B \rightarrow A$ une petite extension. Alors p est essentielle si et seulement si p n'admet pas de section $s : A \rightarrow B$ (telle que $p \circ s = \text{id}_A$).

Preuve. Supposons que p admette une section s . Alors $ps = \text{id}_A$ est évidemment surjective, mais s n'est pas surjective, car sinon p est injective et donc $\ker(p) = 0$, ce qui contredit l'hypothèse que p est une petite extension. Donc p n'est pas essentielle.

Réciproquement, supposons p non essentielle. En construisant C comme dans la preuve précédente, on obtient que la restriction de p à C est essentielle (puisque $t_C^* \simeq t_A^*$). Cela montre que C est un sous-anneau propre de B . Ainsi la longueur de C est strictement plus petite que celle de B , qui est égale à $\text{longueur}(A) + 1$ (car on a la suite exacte $0 \rightarrow \ker(p) = (t) \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow 0$). Puisque $p|_C$ est une surjection, on a aussi $\text{longueur}(C) \geq \text{longueur}(A)$, d'où finalement l'égalité entre les longueurs de C et A . Par conséquent, $p|_C$ (surjection entre modules de même longueur) est un isomorphisme entre C et A . Si on note s son inverse, on obtient une section comme annoncé. \square

Définition 39 (formellement lisse). Un morphisme de foncteurs $F \rightarrow G$ est dit *formellement lisse* si pour toute surjection $p \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$, le morphisme $F(B) \rightarrow F(A) \times_{G(A)} G(B)$ induit par $F(p)$ et $G(p) \circ (F \rightarrow G)$ est surjectif.

Propriété 40. *Voici quelques propriétés simples :*

- Il suffit de vérifier la lissité formelle pour les petites extensions.
- Une composition de morphismes formellement lisses est formellement lisse.
- Dire que R est une enveloppe de F peut être reformulé en disant qu'il existe un morphisme $\text{Hom}(R, -) \rightarrow F$ formellement lisse telle que l'application $t_R \rightarrow t_F$ induite soit une bijection.

1.5.2 Existence d'une enveloppe

On va prouver l'existence d'une enveloppe, en suivant la présentation très claire qu'en fait [Vak00]. On rappelle qu'on a un foncteur $F : \mathcal{C}^0 \rightarrow \mathbf{Set}$ tel que $F(k)$ soit un singleton, et qu'on demande que le morphisme canonique :

$$F \left(A \times_C B \right) \rightarrow F(A) \times_{F(C)} F(B)$$

associé à un couple de morphismes $A \rightarrow C, B \rightarrow C$ dans \mathcal{C}^0 soit :

- surjectif lorsque $B \rightarrow C$ est une petite extension (en découpant une surjection quelconque en petites extensions, on obtient gratuitement ce fait pour les surjections) ;
- bijectif lorsque $C = k$ et $B = k[\varepsilon]$;

et on demande par ailleurs que le k -espace vectoriel $t_F = F(k[\varepsilon])$ (bien défini grâce à la seconde condition) soit de dimension finie.

Construction de l'enveloppe

Soit t_1, \dots, t_r une base de t_F^* , t_1^*, \dots, t_r^* la base duale de t_F (avec $t_i^*(t_i) = 1$) et $S = W(k)[[T_1, \dots, T_r]]$. On définit :

$$R_2 = S/\mathfrak{m}_S^2$$

Un élément de R_2 peut se mettre uniquement sous la forme $w_0 + \sum_{i=1}^r w_i T_i$ avec les $w_i \in W(k)$. La multiplication est donnée par :

$$\left(w_0 + \sum_{i=1}^r w_i T_i \right) \left(w'_0 + \sum_{i=1}^r w'_i T_i \right) = w_0 w'_0 + \sum_{i=1}^r (w_0 w'_i + w'_0 w_i) T_i$$

Comparons cet anneau à $R' = k[\varepsilon] \times_k \dots \times_k k[\varepsilon]$ (r copies de $k[\varepsilon]$). Un élément de R' est la donnée d'un élément a de k et, pour chaque entier entre 1 et i , d'un autre élément b_i de k de sorte que la i -ième projection renvoie $a + b_i \varepsilon$. La multiplication est donnée par :

$$(a + b_1 \varepsilon, \dots, a + b_r \varepsilon)(a' + b'_1 \varepsilon, \dots, a' + b'_r \varepsilon) = (aa' + (ab'_1 + a'b_1)\varepsilon, \dots, aa' + (ab'_r + a'b_r)\varepsilon)$$

On remarque ainsi que l'application $(a + b_1 \varepsilon, \dots, a + b_r \varepsilon) \mapsto a + \sum_{i=1}^r b_i T_i$ est un isomorphisme entre R' et R_2 , d'où la description de R_2 comme $k[\varepsilon] \times_k \dots \times_k k[\varepsilon]$. En appliquant $r - 1$ fois la deuxième hypothèse du critère, on obtient donc :

$$F(R_2) = F(k[\varepsilon] \times_k \dots \times_k k[\varepsilon]) \simeq F(k[\varepsilon]) \times_{F(k)} \dots \times_{F(k)} F(k[\varepsilon]) \simeq t_F^r \simeq \text{Hom}(t_F, t_F)$$

(on a utilisé le fait que $F(k)$ est un singleton, puis que r est la dimension de t_F)

Posons ξ_2 l'élément de $F(R_2)$ associé à $\text{id}_{t_F} \in \text{Hom}(t_F, t_F)$. On peut définir à l'aide de ξ_2 une application $t_{R_2} \rightarrow t_F$ ainsi : soit $x \in t_{R_2}$, qu'on peut voir comme un morphisme $R_2 \rightarrow k[\varepsilon]$, alors $F(x)$ définit un morphisme $F(R_2) \rightarrow t_F$, et on peut donc considérer $F(x)(\xi_2) \in t_F$. On pose :

$$\varphi_2 : x \in t_{R_2} \mapsto F(x)(\xi_2) \in t_F$$

Déterminons l'image par φ_2 du morphisme de $W(k)$ -algèbres $x_i : R_2 \rightarrow k[\varepsilon]$ défini par $x_i(T_j) = \delta_{i,j}$. En tant que morphisme $t_F^r \rightarrow t_F$, $F(x_i)$ est égal à la projection sur la i -ième coordonnée ; appliqué à ξ_2 , il renvoie donc $t_i^* \in t_F$. Il est aisé de vérifier que (x_i) est une base de t_{R_2} , et donc φ_2 envoie une base sur une base : c'est un isomorphisme $t_{R_2} \simeq t_F$.

On va construire par récurrence deux suites (J_q) et (ξ_q) , avec J_q un idéal de S et $\xi_q \in F(S/J_q)$. Pour J_2 , on prend \mathfrak{m}_S^2 et on définit ξ_2 comme précédemment. En supposant J_q, ξ_q construits, on demande à J_{q+1} de vérifier les propriétés suivantes :

- $\mathfrak{m}_S J_q \subset J_{q+1} \subset J_q$;
- Il existe $\xi'_q \in F(S/J_{q+1})$ d'image ξ_q dans $F(S/J_q)$;
- J_{q+1} est minimal parmi les idéaux satisfaisant les deux propriétés ci-dessus.

Soit \mathcal{S}_{q+1} l'ensemble des idéaux qui vérifient les deux premières propriétés. Déjà, $J_q \in \mathcal{S}_{q+1}$, donc \mathcal{S}_{q+1} est non vide et il ne reste qu'à montrer qu'il possède un idéal minimal. Pour cela, on doit montrer que \mathcal{S}_{q+1} est stable par intersection. Pour la première propriété, c'est clair.

On va décrire une correspondance injective entre \mathcal{S}_{q+1} et certains sous- k -espaces-vectoriels de $J_q/\mathfrak{m}_S J_q$. Soit $J \in \mathcal{S}_{q+1}$. Alors on peut lui associer $J' := J/\mathfrak{m}_S J_q$ qui est un sous-espace

vectorel de $J_q/\mathfrak{m}_S J_q$. Si \tilde{J} a le même \tilde{J}' associé, alors $\forall x \in J, \exists y \in \tilde{J}, x - y \in \mathfrak{m}_S J_q$, et donc $x - y \in \tilde{J}$ d'où $x = y + (x - y) \in \tilde{J}$, donc $J \subset \tilde{J}$ (et symétriquement $\tilde{J} \subset J$). Ainsi J et \tilde{J} sont égaux : l'application $J \mapsto J'$ est donc injective.

Puisque $J_q/\mathfrak{m}_S J_q$ est un quotient du S -module J_q de dimension finie (car S est noethérien), c'est un k -espace vectoriel de dimension finie. En particulier, toute intersection de sous-espaces vectoriels de $J_q/\mathfrak{m}_S J_q$ est l'intersection d'un nombre fini de ces sous-espaces vectoriels. Vu la correspondance précédente, cela montre qu'il nous suffit de montrer que \mathcal{S}_{q+1} est stable par intersection deux à deux.

Soit $J, K \in \mathcal{S}_{q+1}$. On peut choisir une base du k -espace vectoriel $J_q/\mathfrak{m}_S J_q$ de la forme :

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_{J' \cap K'} \sqcup \mathcal{B}_{J' \text{ manquants}} \sqcup \mathcal{B}_{K' \text{ manquants}} \sqcup \mathcal{B}_{\text{manquants}}$$

en complétant itérativement une base de $J' \cap K'/\mathfrak{m}_S J_q$ pour engendrer $J'/\mathfrak{m}_S J_q, J' \oplus K'/\mathfrak{m}_S J_q$ puis tout $J_q/\mathfrak{m}_S J_q$. On peut agrandir l'idéal J pour y inclure les éléments projetés sur $\mathcal{B}_{\text{manquants}}$: il est alors toujours dans \mathcal{S}_{q+1} (en prenant pour relèvement de ξ_q la projection du relèvement existant) et on a de plus $J + K = J_q$, tandis que $J \cap K$ n'a pas changé. Cela permet d'écrire, par théorème des restes chinois :

$$S/(J \cap K) \simeq S/J \times_{S/J_q} S/K$$

On a par hypothèse des relèvements de $\xi_q \in F(S/J_q)$ à $F(S/J)$ et à $F(S/K)$, et la première hypothèse du critère de SCHLESSINGER nous dit que :

$$F(S/(J \cap K)) \simeq F(S/J \times_{S/J_q} S/K) \twoheadrightarrow F(S/J) \times_{F(S/J_q)} F(S/K)$$

d'où un relèvement de ξ_q à $F(S/(J \cap K))$. Ainsi, $J \cap K \in \mathcal{S}_{q+1}$. Tout ceci montre qu'on peut prendre :

$$J_{q+1} = \bigcap_{J \in \mathcal{S}_{q+1}} J$$

et ξ_{q+1} est un relèvement de ξ_q à $F(S/J_{q+1})$, l'existence d'un tel relèvement étant assurée par la définition de \mathcal{S}_{q+1} .

On définit finalement l'idéal J :

$$J = \bigcap_{q \geq 2} J_q$$

puis l'anneau $R = S/J$.

Une récurrence immédiate (voir les définitions de J_2 et de \mathcal{S}_{q+1}) montre que $\mathfrak{m}_S^q \subset J_q$. Ainsi, la suite des projections des ξ_q dans R converge vers un élément $\xi \in F(R)$.

On va montrer que R est une enveloppe de F .

Pourquoi est-ce une enveloppe ?

Déjà, par construction, à toute étape, $t_{S/J_q} \simeq t_F$, si bien que $t_R \simeq t_F$.

Soit un morphisme $R \rightarrow A$, avec $A \in \mathcal{C}^0$. Par functorialité, il induit un morphisme $F(R) \rightarrow F(A)$, dont on peut regarder l'image en ξ . Cela définit un morphisme de foncteurs :

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(R, -) \rightarrow F$$

dont il nous reste à montrer qu'il est formellement lisse. Soit une surjection $p \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ (qu'on peut supposer être une petite extension sans perte de généralité). On regarde le morphisme :

$$\text{Hom}(R, B) \rightarrow \text{Hom}(R, A) \times_{F(A)} F(B)$$

et on se demande s'il est surjectif. Soit donc un morphisme $\varphi : R \rightarrow A$ et $x \in F(B)$ tels que $F(\varphi)(\xi) = F(p)(x)$ (on notera a cet élément de $F(A)$).

Puisque A est artinien, il existe un entier q tel que $\mathfrak{m}_A^q = 0$. Alors, $\varphi(\mathfrak{m}_S^q) = 0$. Puisque $\mathfrak{m}_S^q \subset J_q$, on a $\varphi(x + J_q) = \varphi(x)$. Ainsi, φ se factorise par S/J_q . On notera encore φ le morphisme $S/J_q \rightarrow A$ associé. Notre approche va être de compléter ce diagramme :

$$\begin{array}{ccc} S/J_{q+1} & \overset{\exists?}{\dashrightarrow} & B \\ \downarrow & & \downarrow p \\ S/J_q & \xrightarrow{\varphi} & A \end{array}$$

Si cela est possible, on obtiendra un morphisme φ_2 d'image φ dans $\text{Hom}(R, A)$, mais qui n'aura pas nécessairement la bonne image dans $F(B)$. On va commencer par voir pourquoi cela n'est pas un problème.

Posons $I = \ker(p)$. On sait (puisque p est une petite extension) que $\mathfrak{m}_B I = 0$. Il y a un isomorphisme :

$$B \times_A B \simeq B \times_k k[I]$$

donné par $(x, y) \mapsto (x, \bar{x} + y - x)$. En effet :

- \bar{x} est dans k et $y - x$ est d'image nulle par p est donc dans I , ainsi $\bar{x} + y - x$ est bien dans $k[I]$;
- L'additivité est claire ;
- L'image de (xx', yy') est $(xx', \bar{x}\bar{x}' + yy' - xx')$.

$$\begin{aligned}
 (\bar{x} + y - x)(\bar{x}' + y' - x') &= \bar{x}\bar{x}' + \bar{x}'(y - x) + \bar{x}(y' - x') + (y - x)(y' - x') \\
 &= \bar{x}\bar{x}' + (x' + \bar{x}' - x')(y - x) + (x + \bar{x} - x)(y' - x') + (y - x)(y' - x') \\
 &= \bar{x}\bar{x}' + x'(y - x) + x(y' - x') + (y - x)(y' - x') \\
 &\quad + \underbrace{(\bar{x}' - x')}_{\in \mathfrak{m}_B} \underbrace{(y - x)}_{\in I} + \underbrace{(\bar{x} - x)}_{\in \mathfrak{m}_B} \underbrace{(y' - x')}_{\in I} \\
 &= \bar{x}\bar{x}' + yy' - xx'
 \end{aligned}$$

d'où la multiplicativité ;

— $(x, \delta) \mapsto (x, x - \bar{x} + \delta)$ est une application réciproque évidente.

Ainsi, en utilisant la deuxième hypothèse du critère et un résultat déjà démontré :

$$F(B \times_A B) \simeq F(B \times_k k[I]) \simeq F(B) \times F(k[I]) = F(B) \times (t_F \otimes I)$$

D'où un morphisme :

$$F(B) \times (t_F \otimes I) \rightarrow F(B) \times_{F(A)} F(B)$$

qui est surjectif d'après la première hypothèse du critère. Autrement dit, on a une action transitive (en considérant la deuxième coordonnée dans l'image) de $t_F \otimes I$ sur $F(p)^{-1}(a)$. De la même manière, on définit une action transitive de $t_F \otimes I$ sur $\text{Hom}(S/J_{q+1}, -)(p)^{-1}(\varphi)$, qui est envoyée par le morphisme de foncteurs $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(S/J_{q+1}, -) \rightarrow F$ sur l'action précédente.

Soit donc x' l'image dans $F(B)$ du morphisme φ_2 qu'on suppose obtenu comme plus haut. Par transitivité de l'action sur $F(p)^{-1}(a)$, il existe un élément $\sigma \in t_F \otimes I$ qui envoie x' sur x . En appliquant σ à $\varphi_2 \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(S/J_{q+1}, B)$, on obtient un autre relèvement $\varphi_3 \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(S/J_{q+1}, B)$ dont l'image dans $F(B)$ est, cette fois, bien égale à $\sigma.x' = x$. Le morphisme φ_3 est donc bien un antécédent du couple (φ, x) dans $\text{Hom}(R, B)$.

Reste à montrer l'existence de $\varphi_2 : S/J_{q+1} \rightarrow B$ relevant $\varphi : S/J_q \rightarrow B$.

Il faut distinguer deux cas :

— Supposons qu'il existe un morphisme $f : S/J_q \rightarrow S/J_q \times_A B$ tel que $pr_1 \circ f = \text{id}_{S/J_q}$. Autrement dit, on a :

$$\begin{array}{ccc}
 S/J_q & \xrightarrow{\text{id}_{S/J_q}} & S/J_q \\
 \downarrow & & \downarrow \varphi \\
 B & \xrightarrow{p} & A
 \end{array}$$

C'est-à-dire qu'il existe un morphisme $S/J_q \rightarrow B$ relevant φ . Quitte à le voir comme un morphisme de S/J_{q+1} dans B , on a le résultat.

— Supposons le contraire. Alors la petite extension $pr_1 : S/J_q \times_A B \rightarrow S/J_q$ n'admet pas de section. D'après un lemme vu précédemment, elle est donc essentielle (!).

On rappelle que S est défini comme $W(k)[[T_1, \dots, T_r]]$. Pour tout i , soit x_i un antécédent par p (donc un élément de B) de l'image de T_i par $S \rightarrow S/J_q \xrightarrow{\varphi} A$. On peut définir un morphisme $\tilde{w} : S \rightarrow B$ par $T_i \mapsto x_i$, de sorte que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\tilde{w}} & B \\ \downarrow & & \downarrow p \\ S/J_q & \xrightarrow{\varphi} & A \end{array}$$

On obtient donc un morphisme $w : S \rightarrow S/J_q \times_A B$ s'insérant dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{w} & S/J_q \times_A B \\ \downarrow & \nearrow \exists? & \downarrow pr_1 \\ S/J_{q+1} & \longrightarrow & S/J_q \end{array}$$

Si la flèche en pointillés existe, on aura un morphisme φ_2 comme on le cherche.

Puisque $pr_1 \circ w : S \rightarrow S/J_q$ est simplement le quotient par J_q , c'est un morphisme surjectif. pr_1 étant essentielle, w est donc surjective. Pour montrer que la flèche en pointillés existe, il suffit par propriété universelle du quotient de montrer que le noyau de w contient J_{q+1} . Par définition de J_{q+1} , il suffit pour cela de montrer que $\ker(w) \in \mathcal{S}_{q+1}$.

D'abord, il est clair que $\ker(w) \subset J_q$, puisque J_q est le noyau de $S \rightarrow S/J_q$. De plus, si $x \in \mathfrak{m}_S J_q$, son image dans B est dans \mathfrak{m}_B^{q+1} et est donc nulle (car $B \rightarrow A$ est une petite extension et que $\mathfrak{m}_A^q = 0$), et son image dans S/J_q est évidemment nulle. Donc $\mathfrak{m}_S J_q \subset \ker(w) \subset J_q$.

Reste à vérifier qu'il existe un relèvement de ξ_q à $F(S/\ker(w)) \simeq F(\text{Im}(w)) \simeq F(B \times_A S/J_q)$.

D'après la première hypothèse du critère, on a :

$$F(B \times_A S/J_q) \twoheadrightarrow F(B) \times_A F(S/J_q)$$

Et il existe donc bien un élément de $F(B \times_A S/J_q)$ d'image ξ_q dans $F(S/J_q)$, ce qui conclut la preuve.

1.5.3 Condition nécessaire

Pour achever la preuve du critère de SCHLESSINGER, il ne reste plus qu'à montrer que l'existence d'une enveloppe en implique les hypothèses.

Soit R une enveloppe, alors il existe un $\xi \in F(R)$ tel que pour toute surjection $p : B \rightarrow A$ le morphisme $\text{Hom}(R, B) \rightarrow \text{Hom}(R, A) \times_{F(A)} F(B)$ défini par $\varphi \mapsto (p \circ \varphi, F(\varphi)(\xi))$ (on a bien $F(p \circ \varphi)(\xi) = F(p)(F(\varphi)(\xi))$) soit surjectif, et par ailleurs $t_R \simeq t_F$.

- Puisque $t_F \simeq t_R$, on sait donc déjà que t_F est de dimension finie.
- Soit désormais une petite extension $B \rightarrow C$, et un morphisme $A \rightarrow C$, on doit montrer que : $F(A \times_C B) \rightarrow F(A) \times_{F(C)} F(B)$ est surjective.

Soit $(a, b) \in F(A) \times_{F(C)} F(B)$. Alors puisque R est une enveloppe, il existe $(\alpha, \beta) \in \text{Hom}(R, A) \times_{\text{Hom}(R, C)} \text{Hom}(R, B)$ qui sont envoyés sur (a, b) par $\text{Hom}(R, -) \rightarrow F$. Par propriété universelle du produit fibré, le couple (α, β) définit un morphisme $\gamma \in \text{Hom}(R, A \times_C B)$, on peut alors regarder $c = F(\gamma)(\xi) \in F(A \times_C B)$. L'image dans $F(A)$ de c peut se calculer à l'aide du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} F(A \times_C B) & \xrightarrow{F(pr_1)} & F(A) \\ F(-)(\xi) \uparrow & & F(-)(\xi) \uparrow \\ \text{Hom}(R, A \times_C B) & \xrightarrow{pr_1 \circ} & \text{Hom}(R, A) \end{array}$$

Puisque l'image dans $\text{Hom}(R, A)$ de γ est α par définition, l'image dans $F(A)$ de c est égale à $F(\alpha)(\xi) = a$. De même, l'image dans $F(B)$ de c est b , ce qui montre la surjectivité du morphisme $F(A \times_C B) \rightarrow F(A) \times_{F(C)} F(B)$.

- Enfin, il faut montrer que $F(A \times_k k[\varepsilon]) \rightarrow F(A) \times_{t_F}$ est une bijection. La surjectivité résulte du cas précédent ($k[\varepsilon] \rightarrow k$ étant une petite extension). Supposons donc que deux éléments a_1, a_2 de $F(A \times_k k[\varepsilon])$ soient envoyés sur le même élément $\tilde{a} \in F(A) \times_{t_F}$. Puisque R est une enveloppe, il existe deux morphismes $\alpha_1, \alpha_2 : R \rightarrow A \times_k k[\varepsilon]$ qui sont envoyés sur a_1, a_2 par l'application $F(-)(\xi)$ et tels que $pr_1 \circ \alpha_1 = pr_1 \circ \alpha_2$. De plus on sait que $F(pr_2 \circ \alpha_1)(\xi) = F(pr_2 \circ \alpha_2)(\xi) \in t_F$. L'application $F(-)(\xi) : t_R \rightarrow t_F$ étant un isomorphisme, l'égalité précédente montre que $pr_2 \circ \alpha_1 = pr_2 \circ \alpha_2$, et donc $\alpha_1 = \alpha_2$, d'où enfin $a_1 = a_2$.

1.6 Généralisations diverses

Dans ce qui précède, on a préféré la clarté de l'explication à la généralité. On passe ici rapidement sur quelques variantes plus sophistiquées de la théorie qu'on aurait pu considérer.

1.6.1 Restriction de la catégorie aux Λ -algèbres

On aurait pu, au lieu de \mathcal{C} et \mathcal{C}^0 , s'intéresser aux catégories des anneaux de coefficients (artinien) qui sont des Λ -algèbres, avec $\Lambda \in \mathcal{C}$ fixé. Cela permet de définir des catégories \mathcal{C}_Λ et \mathcal{C}_Λ^0 , puis un foncteur D_Λ et de prouver sans grand changement les résultats précédents, qui correspondent au cas $\Lambda = W(k)$ (car tout anneau de coefficients est une $W(k)$ -algèbre). On pourra regarder dans [Gou91] ou dans [Lac16] les détails correspondant à cette situation plus générale. Il faut notamment faire attention à la bonne définition de l'espace cotangent dans ce cas :

$$t_A^* = \mathfrak{m}_A / \mathfrak{m}_A^2 + \mathfrak{m}_\Lambda A$$

Le fait d'imposer cette condition supplémentaire sur les déformations qu'on considère (être à valeurs dans une Λ -algèbre) est motivée par le fait que dans certaines situations concrètes ([Gou91] évoque le cas des formes modulaires), les déformations obtenues ont une structure d'algèbre sur un anneau qui n'est pas forcément $W(k)$.

Cette généralisation n'ajoute pas particulièrement de profondeur aux résultats précédents, puisqu'on a le fait suivant :

Théorème 41. *Supposons que \mathfrak{R} représente le foncteur D , alors D_Λ est représenté par la complétion du produit tensoriel de \mathfrak{R} par Λ comme $W(k)$ -algèbres, c'est-à-dire :*

$$\mathfrak{R}_\Lambda = \mathfrak{R} \widehat{\otimes}_{W(k)} \Lambda$$

Preuve. Soit c le morphisme canonique $\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}_\Lambda := \mathfrak{R} \widehat{\otimes}_{W(k)} \Lambda$, et $[\rho_\Lambda]$ la déformation de $\bar{\rho}$ à \mathfrak{R}_Λ associée à ce morphisme par l'isomorphisme $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}_\Lambda) \simeq D(\mathfrak{R}_\Lambda)$.

Supposons qu'on ait une déformation $[\rho]$ de $\bar{\rho}$ à un anneau $A \in \mathcal{C}_\Lambda$. Alors, en notant $\tilde{\rho}$ le morphisme $\mathfrak{R} \rightarrow A$ associé :

- Puisque A est une Λ -algèbre, par propriété universelle du produit tensoriel, $\tilde{\rho}$ se factorise par $\mathfrak{R} \otimes_{W(k)} \Lambda$. Autrement dit, il existe un morphisme continu $\tilde{\rho}'$ d'anneaux de corps résiduel k induisant l'identité sur les corps résiduels et tel que :

$$\begin{array}{ccccc} & & \tilde{\rho} & & \\ & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\ \mathfrak{R} & \longrightarrow & \mathfrak{R} \otimes_{W(k)} \Lambda & \xrightarrow{\tilde{\rho}'} & A \\ & \searrow & & & \downarrow \\ & & & & k \end{array}$$

- Puisque A est complet, et que $\tilde{\rho}'$ est continu, par propriété universelle du complété, $\tilde{\rho}'$ se factorise par $\mathfrak{R} \widehat{\otimes}_{W(k)} \Lambda = \mathfrak{R}_\Lambda$. Il existe donc un morphisme $\tilde{\rho}''$ dans $\text{Hom}_{\mathcal{C}_\Lambda}(\mathfrak{R}_\Lambda, A)$ tel que $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}'' \circ c$.

En revenant aux déformations, cela signifie que pour toute déformation $[\rho] \in D_\Lambda(A)$, il existe un unique morphisme $\tilde{\rho}'' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_\Lambda}(\mathfrak{R}_\Lambda, A)$ tel que $\rho = \tilde{\rho}''_*(\rho_\Lambda)$ (où $\tilde{\rho}''_*$ désigne l'application coefficient par coefficient).

De plus, si une déformation $[\rho] \in D(A)$, pour un $A \in \mathcal{C}$ quelconque, se met sous la forme $\varphi_*(\rho_\Lambda)$ pour un morphisme $\varphi : \mathfrak{R}_\Lambda \rightarrow A$, il est clair que le morphisme φ munit A d'une structure de Λ -algèbre.

Autrement dit, $[\rho_\Lambda]$ est la déformation universelle associée au foncteur D_Λ , qui est donc bien représenté par \mathfrak{R}_Λ . \square

1.6.2 Version relative

Il y a également une version relative de la théorie, où on regarde le foncteur des déformations qui déforment une déformation fixée.

Si on a une représentation résiduelle $\bar{\rho}$ et une déformation $[\rho_A] \in D_{\bar{\rho}}(A)$ (pour un certain $A \in \mathcal{C}$), on peut regarder uniquement les représentations $\rho_B : G \rightarrow GL_n(B)$ où B est un anneau de coefficients muni d'un morphisme $B \rightarrow A$ (on note $\mathcal{C}(A)$ la catégorie des anneaux de coefficients munis d'un tel morphisme, et $\mathcal{C}^0(A)$ la sous-catégorie pleine des tels anneaux artiniens) tels que l'image de ρ_B par $B \rightarrow A$ soit dans $[\rho_A]$. Ici, la bonne notion d'équivalence stricte est la conjugaison par des matrices de $\ker(GL_n(B) \rightarrow GL_n(A))$, ce qui permet de définir les « déformations relatives ». Pour $A = k$, on retrouve la théorie des déformations usuelles. De plus, il y a un isomorphisme naturel entre, pour un $B \in \mathcal{C}(A)$ fixé, les déformations de $\bar{\rho}$ à B et le coproduit sur les déformations $[\rho_A]$ de $\bar{\rho}$ à A des déformations relatives de $[\rho_A]$ à B . On a donc une façon de « découper » la complexité de la situation arithmétique en plusieurs parties.

1.6.3 Déformations cadrées

Dans ce qui précède, on a considéré les déformations à équivalence stricte près. Si on considère simplement les relèvements de la représentation résiduelle (les « déformations cadrées »), on obtient similairement un foncteur noté $D_{\bar{\rho}}^{\square}$. La notion de déformation obtenue dans ce contexte est globalement bien plus simple à étudier, et l'existence d'une déformation cadrée universelle (qui ne nécessite plus l'hypothèse d'absolue irréductibilité) ne pose aucune difficulté.

Évidemment, on peut combiner entre elles les différentes généralisations aperçues dans cette section.

Chapitre 2

Exemples et applications

Dans ce chapitre, on s'intéresse à différents cas d'application de la théorie des déformations, par exemple en tentant de décrire des anneaux de déformation universels à partir d'informations sur les représentations résiduelles. On abordera aussi très brièvement la théorie de HODGE p -adique.

2.1 Calculs d'anneaux de déformation

2.1.1 Cas uni-dimensionnel

Le cas unidimensionnel, où on a une représentation résiduelle $\bar{\rho} : G \rightarrow GL_1(k) \simeq k^\times$ (c'est-à-dire un caractère), est intéressant pour deux raisons : il s'agit d'un des cas où un calcul explicite est possible, et il a la propriété étonnante que l'anneau de déformation universel ne dépend pas du caractère choisi. Il permet en outre d'illustrer les méthodes qu'il est possible d'utiliser dans ce cas.

Remarquons d'abord qu'un caractère est toujours absolument irréductible, l'anneau de déformation universel existe donc toujours.

Soit Γ l'abélianisé de la complétion p -adique de G . Autrement dit :

$$\Gamma = \left(\varprojlim_H G/H \right)^{\text{ab}}$$

où la limite projective parcourt les sous-groupes distingués ouverts de G dont l'indice (toujours fini, car G est compact) est une puissance de p .

On définit alors :

$$W(k)[[\Gamma]] = \varprojlim_H W(k)[\Gamma/H]$$

où la limite projective parcourt les sous-groupes distingués ouverts de Γ . Si on travaillait dans \mathcal{C}_Λ (voir sous-section 1.4.1), on remplacerait tous les $W(k)$ par Λ .

Théorème 42. *L'anneau de déformation universel associé à un caractère $\bar{\rho} : G \rightarrow k^\times$ est $W(k)[[\Gamma]]$.*

Preuve. L'utilisation du représentant de TEICHMÜLLER (ou, dans le cas général, le lemme de HENSEL dans l'anneau local complet Λ) permet de définir un relèvement canonique de $\bar{\rho}$:

$$\begin{aligned} \rho_0 : G &\rightarrow W(k)^\times \\ g &\mapsto [\bar{\rho}(g)] \end{aligned}$$

Si on a un relèvement $\rho : G \rightarrow GL_1(A) = A^\times$ de $\bar{\rho}$ à un anneau de coefficients A , puisque A a une structure de $W(k)$ -algèbre, on peut définir $\rho' = \rho_0^{-1}\rho$. C'est un caractère dont l'image est toujours triviale dans k , et se trouve donc dans $1 + \mathfrak{m}_A$. C'est-à-dire qu'on a un isomorphisme :

$$\{\rho \in \text{Hom}(G, A^\times) \mid \rho \text{ est un relèvement de } \bar{\rho}\} \simeq \text{Hom}(G, 1 + \mathfrak{m}_A)$$

qui envoie ρ_0 sur le morphisme trivial $g \mapsto 1$.

On peut décrire $1 + \mathfrak{m}_A$ via des isomorphismes correspondant essentiellement au logarithme¹ (on peut regarder [Neu99] pour les détails) :

— Si A est de caractéristique nulle, alors :

$$1 + \mathfrak{m}_A \simeq \mathbb{Z}/p^a\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_p^d$$

où a est un entier positif et $d = [\text{Frac}(A) : \mathbb{Q}_p]$.

— Si A est de caractéristique p , alors :

$$1 + \mathfrak{m}_A \simeq \mathbb{Z}_p^{\mathbb{N}}$$

Dans les deux cas, on voit que $1 + \mathfrak{m}_A$ est un pro- p -groupe abélien. Par conséquent, il est sa propre pro- p -complétion abélianisée et donc un morphisme $G \rightarrow 1 + \mathfrak{m}_A$ se factorise toujours uniquement de la manière suivante (on note γ le morphisme canonique $G \rightarrow \Gamma$) :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\rho'} & 1 + \mathfrak{m}_A \\ \downarrow \gamma & & \wr \\ \Gamma = (G^{(p)})^{\text{ab}} & \xrightarrow{\tilde{\rho}'} & ((1 + \mathfrak{m}_A)^{(p)})^{\text{ab}} \end{array}$$

Il y a donc un isomorphisme :

$$\text{Hom}(G, 1 + \mathfrak{m}_A) \simeq \text{Hom}(\Gamma, 1 + \mathfrak{m}_A)$$

Et on peut écrire : $\rho(g) = \rho_0(g)\rho'(g) = \rho_0(g)(\tilde{\rho}'(\gamma(g)))$.

Par functorialité, un morphisme $\tilde{\rho}' : \Gamma \rightarrow 1 + \mathfrak{m}_A$ induit un morphisme $\tilde{\rho}'' : W(k)[[\Gamma]] \rightarrow W(k)[[1 + \mathfrak{m}_A]] \simeq W(k)[1 + \mathfrak{m}_A]$ (on a le dernier isomorphisme car A est complet). Or, un élément x de $W(k)[1 + \mathfrak{m}_A]$ se met sous la forme :

1. On peut s'en douter : les groupes sont multiplicatifs à gauche de l'isomorphisme, additifs à droite.

$$x = \sum_{i=0}^n w_i (1+m_i)$$

$$\begin{array}{ccc} & \uparrow & \uparrow \\ & \in W(k) & \in \mathfrak{m}_A \end{array}$$

et peut donc être vu comme un élément de A , et réciproquement tout élément de A se met sous cette forme. En effet, si $x \in A$, on regarde $[\bar{x}] \in W(k)$ (le représentant de TEICHMÜLLER de la projection dans k de x), et alors $x - [\bar{x}]$ vaut 0 dans k et est donc un élément $m \in \mathfrak{m}_A$: on a ainsi

$$x = ([\bar{x}] - 1) (1 + 0) + 1 (1 + m)$$

$$\begin{array}{cccc} & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ & \in W(k) & \in \mathfrak{m}_A & \in W(k) & \in \mathfrak{m}_A \end{array}$$

D'où un isomorphisme $W(k)[1 + \mathfrak{m}_A] \simeq A$. Ainsi, tout morphisme $G \rightarrow 1 + \mathfrak{m}_A$ correspond à un morphisme $\rho^\circ : W(k)[[\Gamma]] \rightarrow A$.

Si on applique le foncteur $W(k)[[-]]$ à l'égalité $\rho_0^{-1}\rho = \tilde{\rho}' \circ \gamma$, on obtient :

$$\rho_0^{-1}\rho = \rho^\circ \circ \tilde{\gamma}$$

où on a librement identifié $W(k)[[A^\times]]$ à A ainsi que $W(k)[[W(k)^\times]]$ à $W(k)$, où on a composé à droite par le morphisme canonique $G \rightarrow W(k)[[G]]$, et où on a noté $\tilde{\gamma}$ le morphisme $G \rightarrow W(k)[[\Gamma]]$ obtenu en composant γ à gauche par le morphisme canonique $\Gamma \rightarrow W(k)[[\Gamma]]$ (ou, de manière équivalente, en remarquant que la restriction du morphisme $W(k)[[\gamma]] : W(k)[[G]] \rightarrow W(k)[[\Gamma]]$ à G est à valeurs dans Γ et en le [co]restreignant).

On peut réécrire cette égalité sous la forme plus lisible :

$$\rho = \rho^\circ \circ (\rho_0 \tilde{\gamma})$$

Autrement dit, les déformations ρ de $\bar{\rho}$ à A sont (uniquement) paramétrées par les morphismes $\rho^\circ \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(G, W(k)[[\Gamma]])$ grâce à la déformation $\rho_0 \tilde{\gamma}$, qui est donc la déformation universelle, l'anneau de déformation universel étant bien $W(k)[[\Gamma]]$. \square

2.1.2 Quelques pas en direction du cas général

On va ici essayer de généraliser le principe qui a permis, dans le cas précédent, d'identifier \mathfrak{A} avec $W(k)[[\Gamma]]$ (qui est un anneau de séries formelles sur $W(k)$, avec certaines relations entre les indéterminées données par les égalités dans Γ).

Soit une représentation $\bar{\rho} : G \rightarrow GL_n(k)$, dont on suppose qu'elle admet un anneau de déformation universel \mathfrak{A} . On notera $[\rho]$ la déformation universelle, avec $\rho : G \rightarrow GL_n(\mathfrak{A})$.

Comment décrire un anneau de coefficients

\mathfrak{R} est muni d'une structure naturelle de $W(k)$ -algèbre, de plus c'est un anneau local noethérien, donc on peut écrire son idéal maximal sous la forme $\mathfrak{m}_{\mathfrak{R}} = (q_1, \dots, q_d)$, pour un certain entier d .

Soit un élément arbitraire $x \in \mathfrak{R}$. Si on note $\bar{x} \in k$ sa projection dans k , et $[\bar{x}] \in W(k)$ le représentant de TEICHMÜLLER d'icelle, on peut écrire :

$$x = \begin{array}{c} [\bar{x}] \\ \uparrow \\ \in W(k) \end{array} + \begin{array}{c} m \\ \uparrow \\ \in \mathfrak{m}_{\mathfrak{R}} \end{array}$$

En effet $x - [\bar{x}]$ a une image nulle dans k et est donc dans $\mathfrak{m}_{\mathfrak{R}}$. Maintenant, l'élément $m \in \mathfrak{m}_{\mathfrak{R}}$ se met lui-même sous la forme :

$$m = \sum_{i=0}^n \begin{array}{c} x_i^{(1)} \\ \uparrow \\ \in \mathfrak{R} \end{array} \quad \text{de la forme} \quad \begin{array}{c} \kappa_i^{(1)} \\ \uparrow \\ q_{f(i,1)} q_{f(i,2)} \cdots q_{f(i,r_i)} \end{array}$$

Et on peut refaire ce genre de décompositions avec x_i , et ainsi de suite à l'infini. On obtient alors une suite :

$$[\bar{x}]; \quad [\bar{x}] + \sum_{i=0}^n \begin{bmatrix} \overline{x_i^{(1)}} \\ \kappa_i^{(1)} \end{bmatrix}; \quad [\bar{x}] + \sum_{i=0}^n \begin{bmatrix} \overline{x_i^{(1)}} \\ \kappa_i^{(1)} \end{bmatrix} + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n'} \begin{bmatrix} \overline{x_{i,j}^{(2)}} \\ \kappa_j^{(2)} \kappa_i^{(1)} \end{bmatrix}; \quad \dots$$

d'éléments de $W(k)[q_1, \dots, q_d]$ telle que la différence du i -ème terme avec x est dans $\mathfrak{m}_{\mathfrak{R}}^i$. Autrement dit, dans la complétion $W(k)[[q_1, \dots, q_d]]$, cette suite converge vers x (plus formellement : le morphisme $W(k)[q_1, \dots, q_d] \rightarrow \mathfrak{R}$ est d'image dense et induit donc une surjection $W(k)[[q_1, \dots, q_d]] \rightarrow \mathfrak{R}$)

Cela définit une surjection :

$$W(k)[[X_1, \dots, X_d]] \xrightarrow{X_i \mapsto q_i} W(k)[[q_1, \dots, q_d]] \longrightarrow \mathfrak{R}$$

Dont le noyau est un idéal I de $W(k)[[X_1, \dots, X_d]]$. Cela donne la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow W(k)[[X_1, \dots, X_d]] \longrightarrow \mathfrak{R} \longrightarrow 0$$

Autrement dit, une approche possible pour comprendre \mathfrak{R} est de tenter de déterminer d et l'idéal I . C'est là qu'on utilisera spécifiquement les propriétés de \mathfrak{R} .

Connaître d dans le cas de \mathfrak{R} ?

Dans ce qui précède, on a vu qu'une valeur convenable de d était le nombre minimal de générateurs de $\mathfrak{m}_{\mathfrak{R}}$, c'est-à-dire la dimension de l'espace tangent $\mathfrak{m}_{\mathfrak{R}}/\mathfrak{m}_{\mathfrak{R}}^2$ comme k -espace vectoriel.

En réutilisant l'isomorphisme « cohomologique » démontré dans la preuve de l'existence de l'anneau de déformation universel, on obtient que :

$$t_{\mathfrak{A}} \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{A}, k[\varepsilon]) \simeq D(k[\varepsilon]) = t_D \simeq H^1(G, \mathfrak{M}_n(k))$$

où l'action de G sur $\mathfrak{M}_n(k)$ est donnée par $g.M = \bar{\rho}(g)M\bar{\rho}(g)^{-1}$.

En particulier, on a :

$$d = \dim_k(t_{\mathfrak{A}}) = \dim_k(H^1(G, \mathfrak{M}_n(k)))$$

Autrement dit, l'étude de la cohomologie galoisienne nous donne la valeur de d ! Sans résoudre toute la question, ce résultat est très intéressant.

Informations cohomologiques

On a vu dans ce qui a précédé qu'on pouvait majorer le nombre de générateurs topologiques en tant que $W(k)$ -algèbre de \mathfrak{A} par la dimension du premier groupe de cohomologie de l'action de G sur $\mathfrak{M}_n(k)$ associée à $\bar{\rho}$ (par $g.M = \bar{\rho}(g)M\bar{\rho}(g)^{-1}$). Il est raisonnable de penser que les groupes de cohomologie d'ordre supérieur apportent des informations supplémentaires.

Cela motive de définir :

$$d_i = \dim_k(H^i(G, \mathfrak{M}_n(k)))$$

On peut motiver le fait de s'intéresser aux groupes de cohomologie d'ordre supérieur par ce résultat :

Proposition 43. *Soit une surjection $A \rightarrow B$ de noyau I telle que $\text{Im}_A = 0$ (par exemple une petite extension).*

Alors on peut associer à chaque représentation $\rho : G \rightarrow GL_n(B)$ une classe de cohomologie $\mathcal{O}(\rho) \in H^2(G, \mathfrak{M}_n(k)) \otimes_k I$ telle que ρ admette une déformation à A si et seulement si $\mathcal{O}(\rho) = 0$. Dit de manière plus imagée, $\mathcal{O}(\rho)$ mesure l'obstruction à la déformation de la représentation ρ .

En particulier, si $H^2(G, \mathfrak{M}_n(k)) = 0$, toute représentation peut se déformer : on dit que le problème de déformation est non-obstrué. Dans ce cas, puisque toute surjection s'écrit comme une composition de petites extensions, on peut relever les représentations par n'importe quelle surjection.

Preuve. Puisqu'on a $\text{Im}_A = 0$, on peut voir I comme un k -espace vectoriel. En effet, soit $\lambda \in k$ et $\tilde{\lambda} \in A$ un élément quelconque de reste λ . Alors si $m \in \mathfrak{m}_A$ et $x \in I$, on a :

$$(\tilde{\lambda} + m)x = \tilde{\lambda}x + \underbrace{mx}_0 = \tilde{\lambda}x$$

Donc il y a une multiplication des scalaires de k sur I bien définie (elle ne dépend pas du choix de $\tilde{\lambda}$).

Soit un relèvement « ensembliste » $\gamma : G \rightarrow GL_n(A)$ (c'est-à-dire : un relèvement en chaque $g \in G$, sans exiger qu'il soit un morphisme; un tel relèvement existe bien sûr toujours puisque $A \rightarrow B$ est surjective²) de la représentation ρ . Il s'agit d'un morphisme de groupes (et donc d'une vraie représentation) si et seulement si, pour tous g_1, g_2 , on a :

$$c(g_1, g_2) := \gamma(g_1 g_2) \gamma(g_2)^{-1} \gamma(g_1)^{-1} = 1$$

Modulo I , on sait que $\overline{\gamma(g)} = \rho(g)$ et donc :

$$\overline{c(g_1, g_2)} := \rho(g_1 g_2) \rho(g_2)^{-1} \rho(g_1)^{-1} = \rho(g_1 g_2 g_2^{-1} g_1^{-1}) = 1$$

Ainsi on peut écrire :

$$c(g_1, g_2) = 1 + d(g_1, g_2)$$

Où d est une application $G^2 \rightarrow \mathfrak{M}_n(I) \simeq \mathfrak{M}_n(k) \otimes_k I$.

Or $\mathfrak{M}_n(k) \otimes_k I$ est muni d'une action induite par l'action $g.M = \bar{\rho}(g)M\bar{\rho}(g)^{-1}$ de G sur $\mathfrak{M}_n(k)$. Dans ce contexte, la condition de 2-cocycle pour d s'écrit :

$$\bar{\rho}(g_1)d(g_2, g_3)\bar{\rho}(g_1)^{-1} + d(g_1, g_2 g_3) \stackrel{?}{=} d(g_1 g_2, g_3) + d(g_1, g_2)$$

ou encore (vu la définition de la structure de k -espace vectoriel de I) :

$$\gamma(g_1)d(g_2, g_3)\gamma(g_1)^{-1} + d(g_1, g_2 g_3) \stackrel{?}{=} d(g_1 g_2, g_3) + d(g_1, g_2)$$

Remarquons qu'on a :

$$\gamma(g_1 g_2) = c(g_1, g_2) \gamma(g_1) \gamma(g_2) = \gamma(g_1) \gamma(g_2) + d(g_1, g_2) \gamma(g_1) \gamma(g_2)$$

Notamment :

$$\begin{aligned} \gamma(g_1 g_2 g_3) &= [1 + d(g_1 g_2, g_3)] \gamma(g_1 g_2) \gamma(g_3) \\ &= [1 + d(g_1 g_2, g_3)] [1 + d(g_1, g_2)] \gamma(g_1) \gamma(g_2) \gamma(g_3) \\ &= [1 + d(g_1 g_2, g_3) + d(g_1, g_2) + d(g_1 g_2, g_3) d(g_1, g_2)] \gamma(g_1) \gamma(g_2) \gamma(g_3) \end{aligned}$$

Et puisque d est à valeurs dans $I \subset \mathfrak{m}_A$ et $I\mathfrak{m}_A = 0$, $d(g_1 g_2, g_3) d(g_1, g_2) = 0$. Ainsi :

$$\gamma(g_1 g_2 g_3) = [\gamma(g_1) + d(g_1 g_2, g_3) \gamma(g_1) + d(g_1, g_2) \gamma(g_1)] \gamma(g_2) \gamma(g_3)$$

De manière parfaitement similaire, en écrivant $g_1 g_2 g_3 = g_1 (g_2 g_3)$, on a :

2. Il semble que ce soit une des rares fois où on utilise l'axiome du choix dans ce mémoire; je ne sais pas si c'est nécessaire pour montrer l'existence de la classe de cohomologie. Voir <https://math.stackexchange.com/q/3324319/290401>.

$$\begin{aligned}
 \gamma(g_1 g_2 g_3) &= [1 + d(g_1, g_2 g_3)] \gamma(g_1) \gamma(g_2 g_3) \\
 &= [1 + d(g_1, g_2 g_3)] \gamma(g_1) [1 + d(g_2, g_3)] \gamma(g_2) \gamma(g_3) \\
 &= [1 + d(g_1, g_2 g_3)] \gamma(g_1) [1 + d(g_2, g_3)] \gamma(g_1)^{-1} \gamma(g_1) \gamma(g_2) \gamma(g_3) \\
 &= [1 + d(g_1, g_2 g_3) + \gamma(g_1) d(g_2, g_3) \gamma(g_1)^{-1}] \gamma(g_1) \gamma(g_2) \gamma(g_3)
 \end{aligned}$$

Cela montre :

$$d(g_1 g_2, g_3) + d(g_1, g_2) = d(g_1, g_2 g_3) + \gamma(g_1) d(g_2, g_3) \gamma(g_1)^{-1}$$

Ce qui est exactement la condition de 2-cocycle : ainsi d est un cocycle $G^2 \rightarrow \mathfrak{M}_n(k) \otimes_k I$.

Par ailleurs, si γ' est un autre relèvement de ρ , on a $\gamma' = \gamma + m$, où $m : G \rightarrow \mathfrak{M}_n(I)$.

Alors :

$$\begin{aligned}
 d'(g_1, g_2) &= \gamma'(g_1 g_2) \gamma'(g_2)^{-1} \gamma'(g_1)^{-1} - 1 \\
 &= \gamma(g_1 g_2) \gamma(g_2)^{-1} \gamma(g_1)^{-1} - 1 \\
 &\quad + m(g_1 g_2) \gamma(g_2)^{-1} \gamma(g_1)^{-1} \\
 &\quad + \gamma(g_1 g_2) \gamma(g_2)^{-1} m(g_2) \gamma(g_2)^{-1} \gamma(g_1)^{-1} \\
 &\quad + \gamma(g_1 g_2) \gamma(g_2)^{-1} \gamma(g_1)^{-1} m(g_1) \gamma(g_1)^{-1} \\
 &\quad + (\text{termes dans } I^2 \text{ donc nuls}) \\
 &= d(g_1, g_2) \\
 &\quad + m(g_1 g_2) \gamma(g_2 g_1)^{-1} + (\text{termes dans } I^2) \\
 &\quad + \gamma(g_1) \gamma(g_2) \gamma(g_2)^{-1} m(g_2) \gamma(g_2)^{-1} \gamma(g_1)^{-1} + (\text{termes dans } I^2) \\
 &\quad + \gamma(g_1) \gamma(g_2) \gamma(g_2)^{-1} \gamma(g_1)^{-1} m(g_1) \gamma(g_1)^{-1} + (\text{termes dans } I^2) \\
 &= d(g_1, g_2) \\
 &\quad + m(g_1 g_2) \gamma(g_2 g_1)^{-1} \\
 &\quad + \gamma(g_1) m(g_2) \gamma(g_2)^{-1} \gamma(g_1)^{-1} \\
 &\quad + m(g_1) \gamma(g_1)^{-1}
 \end{aligned}$$

Ainsi, si on pose $\alpha(g) = m(g) \gamma(g)^{-1}$, on a :

$$d'(g_1, g_2) - d(g_1, g_2) = \alpha(g_1 g_2) + g_1 \cdot \alpha(g_2) + \alpha(g_1)$$

Autrement dit, $d' - d$ est un cocycle. Pris à l'envers, ce procédé attribue de même à tout cocycle un autre relèvement de ρ .

Ainsi, l'ensemble des relèvements $G \rightarrow GL_n(A)$ ensemblistes de ρ correspond exactement à **une** classe de cohomologie dans $H^2(G, \mathfrak{M}_n(k) \otimes_k I) = H^2(G, \mathfrak{M}_n(k)) \otimes_k I$. On note cette classe $\mathcal{O}(\rho)$.

Il existe une représentation $G \rightarrow GL_n(A)$ qui relève ρ si et seulement si cette classe est la classe de cohomologie triviale : en effet, il y a un tel relèvement si et seulement si il

est possible de choisir un relèvement ensembliste γ qui soit un morphisme, c'est-à-dire un élément d de la classe de cohomologie $\mathcal{O}(\rho)$ tel que $d = 0$. \square

On a le théorème suivant, qui explore davantage les informations qu'apporte le deuxième groupe de cohomologie :

Théorème 44. *On a toujours :*

$$\dim_{\mathbf{K}_{\text{RULL}}}(\mathfrak{R}/p\mathfrak{R}) \geq d_1 - d_2$$

et il y a égalité lorsque $d_2 = 0$ (i.e. lorsque le problème de déformation est non-obstrué), et dans ce cas :

$$\mathfrak{R} \simeq W(k)[[X_1, \dots, X_{d_1}]]$$

Preuve.

Première partie de la preuve :

On sait déjà qu'il existe une surjection :

$$W(k)[[T_1, \dots, T_{d_1}]] \rightarrow \mathfrak{R}$$

qui induit un isomorphisme sur les espaces tangents. Modulo p , cela donne une surjection :

$$k[[T_1, \dots, T_{d_1}]] \rightarrow \mathfrak{R}/p\mathfrak{R}$$

induisant toujours un isomorphisme sur les espaces tangents (à gauche, on a k^{d_1} , et à droite on a $t_{\mathfrak{R}}$).

Soit I le noyau de cette surjection, on a la suite exacte :

$$0 \rightarrow I \rightarrow k[[T_1, \dots, T_{d_1}]] \rightarrow \mathfrak{R}/p\mathfrak{R} \rightarrow 0$$

Notons m l'idéal maximal de $k[[T_1, \dots, T_{d_1}]]$ (les séries de coefficient constant nul). On a la suite exacte suivante :

$$0 \rightarrow I/mI \rightarrow k[[T_1, \dots, T_{d_1}]]/mI \rightarrow \mathfrak{R}/p\mathfrak{R} \rightarrow 0$$

avec toujours un isomorphisme entre les espaces tangents de $k[[T_1, \dots, T_{d_1}]]/mI$ et $\mathfrak{R}/p\mathfrak{R}$ (car si un élément de l'espace tangent de $k[[T_1, \dots, T_{d_1}]]$ se trouvait dans mI/m^2 , alors il était nul puisque $I \subset m$; on n'a donc pas changé l'espace tangent).

On peut écrire :

$$\begin{aligned} d_1 &= \dim_{\mathbf{K}_{\text{RULL}}}(k[[T_1, \dots, T_{d_1}]]) \\ &\leq \dim_{\mathbf{K}_{\text{RULL}}}(k[[T_1, \dots, T_{d_1}]]/mI) \\ &= \dim_{\mathbf{K}_{\text{RULL}}}(I/mI) + \dim_{\mathbf{K}_{\text{RULL}}}(\mathfrak{R}/p\mathfrak{R}) \\ &= \dim_k(I/mI) + \dim_{\mathbf{K}_{\text{RULL}}}(\mathfrak{R}/p\mathfrak{R}) \end{aligned}$$

Il nous suffit donc de montrer que $\dim_k(I/mI) \leq d_2$.

Si on regarde la déformation universelle $\rho : G \rightarrow GL_n(\mathfrak{R})$, il lui correspond une représentation $\rho_p : G \rightarrow GL_n(\mathfrak{R}/p\mathfrak{R})$, obtenue par simple projection.

I/mI est un idéal de $k[[T_1, \dots, T_{d_1}]]/mI$ vérifiant $m(I/mI) = 0$. Pour cette raison, on est dans le cas de la proposition précédente avec la représentation $\rho_p : G \rightarrow GL_n(\mathfrak{R}/p\mathfrak{R})$ et la surjection $k[[T_1, \dots, T_{d_1}]]/mI \rightarrow \mathfrak{R}/p\mathfrak{R}$. Il existe donc une classe de cohomologie $\mathcal{O}(\rho_p) \in H^2(G, \mathfrak{M}_n(k)) \otimes_k (I/mI)$ associée à ρ_p .

On définit alors l'application linéaire suivante :

$$\begin{aligned} \alpha : (I/mI)^* = \text{Hom}_k(I/mI, k) &\rightarrow H^2(G, \mathfrak{M}_n(k)) \\ \varphi &\mapsto (1 \otimes \varphi)(\mathcal{O}(\rho_p)) \end{aligned}$$

où $1 \otimes \varphi$ désigne l'application $H^2(G, \mathfrak{M}_n(k)) \otimes_k (I/mI) \rightarrow H^2(G, \mathfrak{M}_n(k)) \otimes_k k \simeq H^2(G, \mathfrak{M}_n(k))$ induite par l'identité sur $H^2(G, \mathfrak{M}_n(k))$ et par $\varphi : I/mI \rightarrow k$.

Si α est injective, alors on a :

$$\begin{array}{ccc} \dim_k(\text{Hom}_k(I/mI, k)) & \leq & \dim_k(H^2(G, \mathfrak{M}_n(k))) \\ \parallel & & \parallel \\ \dim_k(I/mI) & & d_2 \end{array}$$

et donc le résultat est montré. Montrons donc que α est injective. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un morphisme $f : I/mI \rightarrow k$ non nul dont l'image par α soit triviale. Alors en reprenant la suite exacte vue plus tôt, et en quotientant « la moitié gauche » par $\ker(f)$, on a la suite exacte :

$$0 \rightarrow (I/mI)/\ker(f) \simeq k \rightarrow k[[T_1, \dots, T_{d_1}]]/(mI, \ker(f)) \rightarrow \mathfrak{R}/p\mathfrak{R} \rightarrow 0$$

Notons $A = k[[T_1, \dots, T_{d_1}]]/(mI, \ker(f))$, on a alors :

$$0 \rightarrow k \rightarrow A \xrightarrow{\pi} \mathfrak{R}/p\mathfrak{R} \rightarrow 0$$

Avec, toujours pour les mêmes raisons, un isomorphisme entre l'espace tangent de A et celui de $\mathfrak{R}/p\mathfrak{R}$.

Par ailleurs $\pi : A \rightarrow \mathfrak{R}/p\mathfrak{R}$ est une petite extension (car la longueur de k est 1). Il y a donc une classe de cohomologie associée aux relèvements de ρ_p à A , qui se trouve dans $H^2(G, \mathfrak{M}_n(k)) \otimes_k k \simeq H^2(G, \mathfrak{M}_n(k))$.

Vue dans $H^2(G, \mathfrak{M}_n(k)) \otimes_k ((I/mI)/\ker(f))$, cette classe est juste la projection (quotient par $\ker(f)$) de $\mathcal{O}(\rho_p)$, et donc son image dans $H^2(G, \mathfrak{M}_n(k)) \otimes_k k$ (via le morphisme $1 \otimes f$ induit par $f : I/mI \rightarrow k$) est obtenue en calculant $(1 \otimes f)\mathcal{O}(\rho_p)$, à savoir $\alpha(f)$, et est donc triviale par choix de f . Il n'y a donc pas d'obstruction au relèvement de ρ_p à A : on peut choisir une représentation $\rho_A : G \rightarrow GL_n(A)$ telle que $\pi_*(\rho_A) = \rho_p$. On peut écrire :

$$\rho_A = \tilde{g} \circ \rho$$

pour un certain morphisme $\tilde{g} : \mathfrak{R} \rightarrow A$. Puisque A est de caractéristique p , \tilde{g} se factorise sous la forme :

$$\tilde{g} = g \circ (\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}/p\mathfrak{R})$$

avec $g : \mathfrak{R}/p\mathfrak{R} \rightarrow A$. On affirme que g scinde la suite exacte précédente. Cela demande juste de se souvenir que ρ_A est un relèvement de ρ_p ; autrement dit, on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \rho_A & & \\
 & & \curvearrowright & & \\
 G & \xrightarrow{\rho_p} & GL_n(\mathfrak{R}/p\mathfrak{R}) & \xrightarrow{g} & GL_n(A) \\
 & \searrow \rho_p & \searrow \parallel & & \downarrow \pi \\
 & & & & GL_n(\mathfrak{R}/p\mathfrak{R})
 \end{array}$$

qui montre que $\pi \circ g = \text{id}_{\mathfrak{R}/p\mathfrak{R}}$.

On sait aussi que la surjection $\pi : A \rightarrow \mathfrak{R}/p\mathfrak{R}$ induit un isomorphisme entre les espaces tangents de A et de $\mathfrak{R}/p\mathfrak{R}$. Puisque $\pi \circ g = \text{id}_{\mathfrak{R}/p\mathfrak{R}}$, g induit sur les espaces tangents l'isomorphisme inverse, et en particulier une surjection.

D'après un lemme de la sous-section 1.5.1, on sait qu'un morphisme qui induit une surjection sur les espaces tangents est surjectif. Le morphisme g est donc surjectif, d'où $g \circ \pi = \text{id}_A$.

Autrement dit, g et π sont deux morphismes inverses l'un de l'autre, et donc $A \simeq \mathfrak{R}/p\mathfrak{R}$. Mais alors $k \simeq \ker(A \xrightarrow{\tilde{g}} \mathfrak{R}/p\mathfrak{R}) = 0$, ce qui est absurde.

On a donc bien obtenu l'inégalité souhaitée.

Deuxième partie de la preuve :

Supposons désormais que $d_2 = 0$. Alors $\dim_k(I/mI) = 0$ d'où $I = 0$. Ainsi, la surjection :

$$W(k)[[T_1, \dots, T_{d_1}]] \rightarrow \mathfrak{R}$$

a un noyau nul et est donc un isomorphisme. □

Il est conjecturé que si $\bar{\rho}$ est absolument irréductible, il y a toujours égalité :

$$\dim_{\mathbf{K}_{\text{RULL}}}(\mathfrak{R}/p\mathfrak{R}) \stackrel{?}{=} d_1 - d_2$$

Un bout du cas local

À partir de maintenant, on va essayer de vraiment utiliser les spécificités du groupe G , à savoir le fait que c'est un groupe de GALOIS absolu.

Dans ce paragraphe, on se place dans le cas $k = \mathbb{F}_p$. Soit K une extension finie de \mathbb{Q}_p et une représentation résiduelle $\bar{\rho} : G_K \rightarrow GL_n(\mathbb{F}_p)$, alors la formule de TATE locale donne la caractéristique d'EULER du G_K -module $\mathfrak{M}_n(\mathbb{F}_p)$ (d'ordre p^{n^2}) :

$$\frac{|H^0(G_K, \mathfrak{M}_n(\mathbb{F}_p))||H^2(G_K, \mathfrak{M}_n(\mathbb{F}_p))|}{|H^1(G_K, \mathfrak{M}_n(\mathbb{F}_p))|} = (|\mathcal{O}_K/|\mathfrak{M}_n(\mathbb{F}_p)|\mathcal{O}_K|)^{-1}$$

C'est-à-dire :

$$\frac{p^{d_0}p^{d_2}}{p^{d_1}} = (|\mathcal{O}_K/(p^{n^2})\mathcal{O}_K|)^{-1}$$

Dans le cas précis où $K = \mathbb{Q}_p$, on a : $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}_p$ et $\mathbb{Z}_p/(p^{n^2})\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/(p^{n^2})\mathbb{Z}$. On se place désormais dans ce cas. Alors :

$$\frac{p^{d_0}p^{d_2}}{p^{d_1}} = p^{-n^2}$$

Autrement dit :

$$d_1 - d_2 = d_0 + n^2 = \dim_k(C_k(\bar{\rho})) + n^2$$

Il est assez intéressant qu'on soit ramené uniquement à des calculs de H^0 . On notera que $H^0(G, \mathfrak{M}_n(k))$ est l'ensemble des matrices de $\mathfrak{M}_n(k)$ qui commutent avec $\bar{\rho}(g)$ pour tout $g \in G$, ce qu'on avait noté $C_k(\bar{\rho})$ dans la preuve de la sous-section 1.4.1. En particulier, si $\bar{\rho}$ est absolument irréductible, on a $d_0 = 1$.

Pour une représentation irréductible, on a donc $d_1 - d_2 = 1 + n^2$ et donc :

$$\dim_{\text{Knull}}(\mathfrak{R}/p\mathfrak{R}) \geq 1 + n^2$$

Dans le cas où $K \neq \mathbb{Q}_p$, le calcul est plus compliqué. Commençons par noter v la valuation sur \mathcal{O}_K et $e = v(p)$, ainsi que π une uniformisante de \mathcal{O}_K . Alors un élément x est dans $(p^{n^2})\mathcal{O}_K = \pi^{n^2e}\mathcal{O}_K$ si et seulement $v(x) \geq n^2e$. On peut partitionner $\mathcal{O}_K/(p^{n^2})\mathcal{O}_K$:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_K/(p^{n^2})\mathcal{O}_K &= \{0\} \cup \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} v^{-1}(i)/(p^{n^2})\mathcal{O}_K \\ &= \{0\} \cup \bigsqcup_{i=0}^{en^2-1} (\pi^i \mathcal{O}_K^\times)/\pi^{n^2e}\mathcal{O}_K \\ &\simeq \{0\} \cup \bigsqcup_{i=0}^{en^2-1} \mathcal{O}_K^\times/(1 + \pi^{n^2e-i}\mathcal{O}_K) \end{aligned}$$

Et donc :

$$|\mathcal{O}_K/(p^{n^2})\mathcal{O}_K| = 1 + \sum_{i=1}^{en^2} |\mathcal{O}_K^\times/U^{(i)}| = 1 + \sum_{i=1}^{en^2} (q-1)|U^{(1)}/U^{(i)}|$$

où $U^{(i)}$ désigne le sous-groupe de \mathcal{O}_K^\times formé des éléments de la forme $1 + \pi^i u$, $u \in \mathcal{O}_K^\times$ et q désigne le cardinal du corps résiduel de K (qui vaut $p^{d/e}$).

De la suite exacte (évidente), pour $j \geq 1$:

$$0 \rightarrow U^{(j)}/U^{(j+1)} \rightarrow U^{(1)}/U^{(j+1)} \rightarrow U^{(1)}/U^{(j)} \rightarrow 0$$

on tire l'égalité :

$$|U^{(1)}/U^{(i)}| = |U^{(1)}/U^{(i-1)}| |U^{(i-1)}/U^{(i)}| = \dots = \prod_{k=1}^{i-1} |U^{(k)}/U^{(k+1)}|$$

Or, $U^{(i)}/U^{(i-1)} \sim \mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K$ (voir [Ser62], page 74) et donc $|U^{(1)}/U^{(i)}| = q^{i-1}$. Ainsi, on a :

$$|\mathcal{O}_K/(p^{n^2})\mathcal{O}_K| = 1 + \sum_{i=1}^{en^2} (q-1)q^{i-1} = q^{en^2} = p^{dn^2}$$

Et donc :

$$d_1 - d_2 = d_0 + \log_p(|\mathcal{O}_K/(p^{n^2})\mathcal{O}_K|) = d_0 + dn^2$$

Cas global

Dans le cas de $G_{K,S}$, où K est une extension finie de \mathbb{Q} de degré $n = [K : \mathbb{Q}]$ et S un ensemble fini de places de K (classes d'équivalences de valeurs absolues) qui contient l'ensemble des places archimédiennes S_∞ , on peut tenter une approche similaire. Étant donné une représentation résiduelle $\bar{\rho} : G_{K,S} \rightarrow GL_n(k)$ admettant un anneau de déformation universel \mathfrak{R} , il est possible d'estimer la valeur de $d_1 - d_2$ et donc de minorer la dimension de $\mathfrak{R}/p\mathfrak{R}$, à l'aide cette fois de la formule de TATE globale pour la caractéristique d'EULER :

$$d_1 - d_2 = d_0 + dn^2 - \sum_{v \in S_\infty} \dim H^0(G_{K_v}, \mathfrak{M}_n(k))$$

Là aussi, on s'est ramené à des calculs de H^0 .

Pour une preuve, on peut lire le paragraphe correspondant de [Gou91] (pp. 55-57).

2.1.3 Changement de groupe

Soit un morphisme de groupes $\varphi : H \rightarrow G$, avec H et G des groupes profinis satisfaisant la condition Φ_p . C'est par exemple le cas du morphisme de restriction $G_{K_v} \hookrightarrow G_{K,S}$ (il est injectif par densité de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\overline{\mathbb{Q}_l}$), lorsque K_v est la complétion de K pour une place v qui n'est pas dans S .

Alors toute représentation $G \rightarrow GL_n(A)$ induit une représentation $H \rightarrow GL_n(A)$. Si on fixe une représentation résiduelle $\bar{\rho} : G \rightarrow GL_n(k)$, en supposant $\bar{\rho} \circ \varphi$ absolument irréductible, on peut se poser la question de la comparaison entre $\mathfrak{R}_{\bar{\rho}}$ et $\mathfrak{R}_{\bar{\rho} \circ \varphi}$. Par exemple, on aimerait bien pouvoir calculer l'anneau de déformation associé à une représentation $G_{K,S} \rightarrow GL_n(k)$ à partir des anneaux de déformations associés aux représentations $G_{K_v} \rightarrow GL_n(k)$.

Toute déformation de $\bar{\rho}$ induit une déformation de $\bar{\rho} \circ \varphi$, comme on le voit sur ce diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \xrightarrow{\rho \circ \varphi} & & \\
 & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \\
 H & \xrightarrow{\varphi} & G & \xrightarrow{\rho} & GL_n(A) \\
 & \text{---} & \searrow \bar{\rho} & \downarrow & \\
 & & & & GL_n(k) \\
 & \text{---} & \xrightarrow{\bar{\rho} \circ \varphi} & & \\
 & & \text{---} & &
 \end{array}$$

Autrement dit, il y a un morphisme :

$$\mathrm{Hom}(\mathfrak{A}_{\bar{\rho}}, -) \simeq D_{\bar{\rho}} \rightarrow D_{\bar{\rho} \circ \varphi} \simeq \mathrm{Hom}(\mathfrak{A}_{\bar{\rho} \circ \varphi}, -)$$

Ce morphisme est injectif lorsque φ est tel que la représentation ρ est déterminée par sa restriction à H , et il est surjectif lorsque toute représentation de H s'étend en une représentation de G .

L'identité $\mathrm{id}_{\mathfrak{A}_{\bar{\rho}}}$ est envoyée par ce morphisme sur un morphisme :

$$\mathfrak{A}_{\bar{\rho} \circ \varphi} \rightarrow \mathfrak{A}_{\bar{\rho}}$$

En particulier on a un morphisme :

$$\prod_{v \notin S} \mathfrak{A}_{\bar{\rho}_v} \rightarrow \mathfrak{A}_{\bar{\rho}}$$

et étudier ce morphisme peut être une méthode pour calculer des anneaux de déformation. C'est par exemple l'approche de [Bij13], qui prouve un théorème de modularité ainsi.

2.2 Typologie des représentations galoisiennes

Dans toute cette section, on fixe un corps local p -adique K (une extension finie de \mathbb{Q}_p , avec p la caractéristique de k). On fixe une clôture algébrique $\bar{K} = \overline{\mathbb{Q}_p}$ de K et on note $\mathbb{C}_K = \mathbb{C}_p$ la complétion de \bar{K} . G_K désignera comme d'habitude le groupe de GALOIS absolu de K . L'action de G_K sur \bar{K} se prolonge par continuité en une action sur \mathbb{C}_K .

Les représentations p -adiques de G_K sont, en principe, très nombreuses³, et on peut donc ne pas vouloir toutes les considérer. Notamment, si une représentation p -adique provient d'un contexte géométrique, elle satisfera des conditions supplémentaires (elle sera HODGE-TATE, par exemple). On détaillera plus tard le sens de cette affirmation.

Puisqu'il est intéressant de vouloir conserver le l'origine géométrique des représentations en les déformant, cela nous amène à vouloir considérer le foncteur des déformations qui ne classe que les représentations d'un certain type, autrement dit, pour \mathcal{Q} une classe

3. D'après [Ber04], ce n'est pas le cas des représentations l -adiques de G_K lorsque $l \neq p$, qui sont peu nombreuses ; c'est donc une richesse de la théorie des représentations p -adiques, plus « souple » et « analytique ».

privilégiée de représentations, on peut regarder le « foncteur »⁴ $D_{\mathcal{Q}} : R \mapsto D(R) \cap \mathcal{Q}$. On a le résultat suivant :

Proposition 45. *Supposons que D et $D_{\mathcal{Q}} : R \mapsto D(R) \cap \mathcal{Q}$ soient des foncteurs pro-représentés respectivement par des anneaux $\mathfrak{R}_{\bar{\rho}}$ et $\mathfrak{R}_{\bar{\rho}, \mathcal{Q}}$. Alors $\mathfrak{R}_{\bar{\rho}, \mathcal{Q}}$ est un quotient de $\mathfrak{R}_{\bar{\rho}}$.*

Preuve. L'injection $i : D_{\mathcal{Q}}(R) \rightarrow D(R)$ donne lieu pour tout $R \in \mathcal{C}^0$ à une injection $I_R : \text{Hom}(\mathfrak{R}_{\bar{\rho}, \mathcal{Q}}, R) \rightarrow \text{Hom}(\mathfrak{R}_{\bar{\rho}}, R)$. L'image de $\text{id}_{\mathfrak{R}_{\bar{\rho}, \mathcal{Q}}}$ par $I_{\mathfrak{R}_{\bar{\rho}, \mathcal{Q}}}$ est un morphisme $p : \mathfrak{R}_{\bar{\rho}} \rightarrow \mathfrak{R}_{\bar{\rho}, \mathcal{Q}}$ tel que

$$\forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{R}_{\bar{\rho}, \mathcal{Q}}, R), I_R(f) = f \circ p$$

En particulier, $dp = I_{k[\varepsilon]}$ est injectif, c'est-à-dire que d^*p est surjectif, et donc p est surjectif. Ainsi :

$$\mathfrak{R}_{\bar{\rho}, \mathcal{Q}} \simeq \mathfrak{R}_{\bar{\rho}} / \ker(p)$$

□

Cette façon d'étudier les propriétés précises des représentations nous amènera à considérer des notions de théorie de HODGE p -adique, laquelle s'occupe de classifier les représentations galoisiennes p -adiques et de mettre en évidence une structure dans le vaste espace des représentations p -adiques, à travers notamment la comparaison entre plusieurs cohomologies (comme en théorie de HODGE classique).

On commence par définir le caractère cyclotomique :

Définition 46 (caractère cyclotomique). Soit un élément $g \in G_K$ (avec K un corps parfait pas forcément p -adique). Si ζ_i est une racine primitive p^i -ième de l'unité dans \bar{K} , alors $g(\zeta_i)$ est une autre racine p^i -ième de l'unité, qui s'écrit donc $\zeta_i^{a_i}$ pour un certain a_i (défini uniquement modulo p^i). Puisque $g(\zeta_i^j) = g(\zeta_i)^j = \zeta_i^{a_i j} = (\zeta_i^j)^{a_i}$, a_i ne dépend pas du choix de la racine primitive en question.

On obtient ainsi une suite $(a_i) \in \prod_i \mathbb{Z}/p^i \mathbb{Z}^\times$ qui vérifie $a_i \equiv a_{i+1} [p^i]$, puisque la puissance p -ième d'une racine p^{i+1} -ième est une racine p^i -ième. Dans \mathbb{Z}_p^\times , la suite (a_i) définit donc un élément qu'on note $\chi_p(g)$. On peut alors écrire $g(\zeta) = \zeta^{\chi_p(g)}$ pour toute racine p^i -ième de l'unité ζ (en donnant à cette puissance le seul sens raisonnable).

L'application $\chi_p : G_K \mapsto \mathbb{Z}_p^\times$ ainsi définie est un morphisme de groupes qu'on nomme caractère cyclotomique. Puisque $\mathbb{Z}_p^\times = \text{Aut}(\mathbb{Z}_p)$, on peut voir ce caractère comme une action de G_K sur \mathbb{Z}_p , définie par $g.x = \chi_p(g)x$. Lorsque K sera un corps p -adique, on désignera le caractère cyclotomique simplement par $\chi = \chi_p$.

4. Ça n'est un foncteur que dans les bons cas, mais on en parlera plus tard.

2.2.1 Conditions sur le déterminant

Une première manière de distinguer certaines représentations $\rho : G \rightarrow GL_n(A)$ est de considérer leur déterminant $\det(\rho)$, qui est un caractère $\det(\rho) : G \rightarrow A^\times$. On peut par exemple considérer uniquement les représentations qui ont un déterminant fixé.

Dans le cas des représentations galoisiennes, un caractère naturel (qu'on peut imposer comme valeur au déterminant) est le caractère cyclotomique $\chi_p : G_K \rightarrow \mathbb{Z}_p^\times$.

2.2.2 Conditions sur la ramification

On rappelle que si K est un corps local p -adique, le sous-groupe d'inertie I de G_K est l'ensemble des $\sigma \in G_K$ dont l'action sur $\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}_p}}/\mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}_p}}}$ est triviale (c'est-à-dire qu'ils envoient les éléments de $\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}_p}}$ sur des éléments de même image dans le corps résiduel).

Définition 47 (représentation non-ramifiée). Soit une représentation galoisienne p -adique :

$$\rho : G_K \rightarrow GL_n(A)$$

alors ρ est non-ramifiée si tout élément du groupe d'inertie I de G_K est d'image triviale par ρ , autrement dit :

$$I \subset \ker(\rho)$$

Moralement, cela signifie que « ρ ne se préoccupe que de ce que les automorphismes font sur le corps résiduel ». Le nom « non-ramifié » est motivé par le fait que les représentations non-ramifiées sont exactement celles qui se factorisent par $\text{Gal}(K^{nr}|K)$, où K^{nr} est l'extension non-ramifiée maximale de K .

Là encore, il est pertinent de demander aux déformations de ne pas ramifier.

2.2.3 Décomposition et représentations de HODGE–TATE

À partir du caractère cyclotomique, on peut construire une famille de caractères : pour un entier $r \in \mathbb{Z}$ arbitraire, on a le caractère χ^r .

Lorsque \mathbb{Z}_p est muni de l'action associée au caractère χ^r , on le note $\mathbb{Z}_p(r)$. Avec cette notation, $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}_p(0)$. De même, pour un \mathbb{Z}_p -module M arbitraire muni d'une action du groupe de GALOIS (éventuellement triviale), on peut définir $M(r)$ comme $M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(r)$, avec l'action $g.(x \otimes y) = (g.x) \otimes (g.y)$. On a par exemple $\mathbb{Z}_p(i)(j) = \mathbb{Z}_p(i+j)$.

Le caractère cyclotomique étant un exemple fondamental de représentation galoisienne « naturelle », l'idée de la décomposition de HODGE–TATE est d'essayer d'exprimer des représentations galoisiennes quelconques en fonction de celle-ci et de ses puissances.

Définition « à la main »

On reprend ici une définition trouvable dans [Ser68].

Soit $\rho : G_K \rightarrow \text{Aut}(V)$ une représentation galoisienne. On pose :

$$W = \mathbb{C}_K \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$$

avec l'action suivante : $g.(x \otimes y) = g(x) \otimes \rho(g)(y)$ pour $g \in G_K$, $x \in \mathbb{C}_K$ et $y \in V$. On regarde alors les K -espaces vectoriels suivants :

$$W^i = \{w \in W \mid \forall g \in G_K, g.w = \chi(g)^i w\}$$

Puis on pose $W(i) = W^i \otimes_K \mathbb{C}_K$. Il s'agit en un sens de « la partie de W sur laquelle l'action du groupe de GALOIS ressemble à la puissance i -ième du caractère cyclotomique » (on peut faire une analogie avec les espaces propres).

Il y a une application \mathbb{C}_K -linéaire canonique $W(i) \rightarrow W$, qui commute avec l'action de GALOIS. La donnée de toutes ces applications fournit une application \mathbb{C}_K -linéaire :

$$\alpha : \prod_{i \in \mathbb{Z}} W(i) \rightarrow W$$

Théorème 48. *On a les propriétés suivantes :*

- α est injectif.
- Les \mathbb{C}_K -espaces vectoriels $W(i)$ sont linéairement indépendants.
- Les espaces W^i sont des K -espaces vectoriels de dimension finie.

Pour une preuve de ce théorème, on renvoie à [Ser67]. Ce qui nous intéresse effectivement est la définition suivante :

Définition 49 (représentation de HODGE–TATE). La représentation $\rho : G_K \rightarrow \text{Aut}(V)$ est de HODGE–TATE lorsque le morphisme α ci-dessus est un isomorphisme (c'est-à-dire que la représentation se découpe bien en puissances du caractère cyclotomique, on peut voir un lien avec la diagonalisabilité).

Une définition dans le cas global peut être trouvée un peu plus loin dans [Ser68].

Une autre manière de dire la même chose est d'appeler $d_V(i)$ la dimension de $W(i)$ (qu'on nomme i -ième poids de HODGE–TATE), qu'on peut aussi calculer comme la dimension sur \mathbb{Q}_p de l'espace des éléments de $V(-i) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_K$ invariants par l'action de G_K (puisque le $(-i)$ « décale vers la gauche » les puissances du caractère cyclotomiques, et que les invariants sont les éléments pour lesquels cette puissance vaut 0). Alors on a toujours :

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} d_V(i) \leq \dim_{\mathbb{Q}_p}(V)$$

et V est de HODGE–TATE lorsqu'il y a égalité.

On verra plus tard qu'au delà du fait que les représentations soient ou non HODGE–TATE, on peut avoir envie de les distinguer selon les valeurs de leurs poids de HODGE–TATE.

Le formalisme des périodes

Une définition équivalente mais plus commode et généralisable, due à FONTAINE, consiste à utiliser le formalisme des périodes (on suivra [Ber]). Si on définit l'anneau $B_{HT} = \mathbb{C}_K[t, t^{-1}]$ munie de l'action de GALOIS définie par $g.t = \chi(g)t$ (ce qu'on appelle un anneau des périodes), on peut définir l'application suivante, qui à une représentation galoisienne associe un K -espace vectoriel gradué :

$$D_{HT} : V \mapsto (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{HT})^{G_K}$$

On a en fait :

$$D_{HT}(V) \simeq \sum_{i \in \mathbb{Z}} (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} t^i \mathbb{C}_K)^{G_K} \simeq \sum_{i \in \mathbb{Z}} (V(i) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_K)^{G_K} \simeq \prod_{i \in \mathbb{Z}} W(-i)$$

Ce qui nous ramène à la situation précédente : on peut par exemple dire que V est de HODGE-TATE lorsque $\dim_K(D_{HT}) = \dim_{\mathbb{Q}_p}(V)$, et ainsi de suite. L'intérêt est qu'on a pu intégrer toutes les informations sur les puissances du caractère cyclotomique dans un seul anneau.

2.2.4 Représentations de DE RHAM

L'avantage du formalisme des périodes est qu'on peut aisément remplacer B_{HT} par un autre anneau des périodes pour obtenir une autre classe de représentation. On suivra principalement [BC09] et [Ber].

Pour définir les représentations dites de DE RHAM, on va définir un anneau B_{dR} en plusieurs étapes :

En partant de \mathbb{C}_K , on considère son anneau des entiers $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}$. On pose alors l'anneau :

$$\tilde{E}^+ = \varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}/(p)$$

Ici, la limite projective est prise sur le système suivant :

$$\mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}/(p) \xleftarrow{x \mapsto x^p} \mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}/(p) \xleftarrow{x \mapsto x^p} \mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}/(p) \xleftarrow{x \mapsto x^p} \cdots$$

C'est-à-dire qu'un objet de \tilde{E}^+ est une suite (x_i) d'éléments de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}/(p)$ vérifiant $x_i = (x_{i+1})^p$ (puisque'on a quotienté par p , la puissance p -ième est bien une opération additive); autrement dit, c'est le choix d'un élément x_1 de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}/(p)$ et d'une suite compatible de racines p^n -ièmes de x_1 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On définit l'application $\theta_0 : (\tilde{E}^+)^{\times} \rightarrow (\mathcal{O}_{\mathbb{C}_K})^{\times}$ par : $\theta_0(x_1, x_2, \dots) = \lim_{i \rightarrow \infty} (\tilde{x}_i)^{p^i}$ (pour un choix arbitraire de \tilde{x}_i tels que $\tilde{x}_i \pmod p = x_i$). Cette application est bien définie, et on a $\theta_0(x_1, x_2, \dots) \pmod p = x_1$.

Considérons désormais l'anneau $W(\tilde{E}^+)$ des vecteurs de WITT sur \tilde{E}^+ . Il existe un unique morphisme d'anneau $\theta : W(\tilde{E}^+) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}$ tel que $\theta([x]) = \theta_0(x)$ (on rappelle que $[x]$ est le représentant de TEICHMÜLLER de x); explicitement :

$$\theta \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} [c_n] p^n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \theta_0(c_n) p^n$$

On définit alors :

$$\tilde{B}^+ = \text{Frac}(W(\tilde{E}^+)) = W(\tilde{E}^+)[1/p]$$

On remarque que θ s'étend en un morphisme surjectif $\theta' : \tilde{B}^+ \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}[1/p] = \mathbb{C}_K$. Notons I^+ le noyau de ce morphisme. Alors B_{dR}^+ est le complété de \tilde{B}^+ par rapport à I^+ :

$$B_{dR}^+ = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} W(\tilde{E}^+)[1/p]/(I^+)^n$$

Et B_{dR} est défini comme le corps des fractions de B_{dR}^+ , muni de la valuation qui fait de B_{dR}^+ son anneau des entiers :

$$B_{dR} = \text{Frac}(B_{dR}^+) = \text{Frac} \left(\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} W(\tilde{E}^+)[1/p]/(I^+)^n \right)$$

Il reste, pour que la définition de B_{dR} soit complète, à tenir compte de ce que devient l'action (continue) de GALOIS, héritée de l'action sur \mathbb{C}_K (puis sur $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}$, \tilde{E}^+ , $W(\tilde{E}^+)$, B^+ , B_{dR}^+ , et enfin sur B_{dR}). Cette définition assez compliquée définit un corps qui a les propriétés suivantes, qu'on admet. On pourra suivre les références que donne [Ber04] (pages 12-13) pour des détails supplémentaires.

- Il existe⁵ un élément $t \in B_{dR}^+$ qui engendre le noyau de l'application $\tilde{\theta} : B_{dR}^+ \rightarrow \mathbb{C}_K$ et qui vérifie :

$$\mathbb{Z}_p t \simeq \mathbb{Z}_p(1)$$

- La suite suivante est une filtration de B_{dR} :

$$\dots \supset t^{-1} B_{dR}^+ \supset B_{dR}^+ \supset t B_{dR}^+ \supset \dots$$

Le gradué associé à cette filtration, défini par :

$$\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} t^i B_{dR}^+ / t^{i+1} B_{dR}^+$$

est isomorphe à B_{HT} , en tant qu'algèbre graduée munie d'une action de GALOIS.

—

$$B_{dR}^{G_K} = K$$

5. L'uniformisante t peut se définir d'une manière « calculable » :

$$t = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} ([\bar{z}] - 1)^n$$

où $[\bar{z}]$ est le représentant de TEICHMÜLLER de l'image dans \tilde{E}^+ d'un générateur ($z_n \in \mu_{p^n}(\tilde{K})$) de $\mathbb{Z}_p(1)$.

Dans le contexte général des anneaux de période de FONTAINE, on peut faire la même définition que pour les représentations de HODGE–TATE :

Définition 50 (représentation de DE RHAM). Comme dans le cas de D_{HT} , on définit le foncteur :

$$D_{dR} : V \mapsto (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{dR})^{G_K}$$

Et on dit que V est de DE RHAM lorsque :

$$\dim_K D_{dR}(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p}(V)$$

Les propriétés vues précédemment semblent indiquer que B_{dR} , tout en étant plus compliqué, est fortement lié à B_{HT} . Le théorème suivant confirme cette intuition :

Théorème 51. *Si une représentation est de DE RHAM, elle est HODGE–TATE. De plus, dans ce cas, on a :*

$$\mathrm{Fil}^i D_{dR}(V) / \mathrm{Fil}^{i+1} D_{dR}(V) = (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_K(i))^{G_K}$$

où

$$\mathrm{Fil}^i D_{dR}(V) = (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} t^i B_{dR}^+)^{G_K}$$

Preuve. On a la filtration suivante de $D_{dR}(V)$:

$$\dots \supset \mathrm{Fil}^{-1} D_{dR}(V) \supset \mathrm{Fil}^0 D_{dR}(V) \supset \mathrm{Fil}^1 D_{dR}(V) \supset \dots$$

Par ailleurs $D_{dR}(V)$ est de dimension finie (égale à $\dim_{\mathbb{Q}_p}(V)$ par hypothèse) et donc la filtration stationne. En fait, pour i assez grand, $\mathrm{Fil}^{-i} D_{dR}(V) = D_{dR}(V)$ ⁶. On peut alors écrire :

$$\dim_{\mathbb{Q}_p}(V) = \dim_K D_{dR}(V) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \dim_K (\mathrm{Fil}^i D_{dR}(V) / \mathrm{Fil}^{i+1} D_{dR}(V))$$

Montrons qu'il existe une injection :

$$\mathrm{Fil}^i D_{dR}(V) / \mathrm{Fil}^{i+1} D_{dR}(V) \hookrightarrow (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} t^i \mathbb{C}_K)^{G_K}$$

Cela suffira à dire :

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{Q}_p}(V) &\geq \dim_K D_{HT}(V) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \dim_K ((V \otimes_{\mathbb{Q}_p} t^i \mathbb{C}_K)^{G_K}) \\ &\geq \sum_{i \in \mathbb{Z}} \dim_K (\mathrm{Fil}^i D_{dR}(V) / \mathrm{Fil}^{i+1} D_{dR}(V)) = \dim_{\mathbb{Q}_p}(V) \end{aligned}$$

6. On utilise ce fait librement ici sans le démontrer.

D'où on déduira l'égalité $\dim_K D_{HT}(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p}(V)$ ainsi que l'isomorphisme annoncé :

$$\mathrm{Fil}^i D_{dR}(V) / \mathrm{Fil}^{i+1} D_{dR}(V) = (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} t^i \mathbb{C}_K)^{G_K}$$

Pour montrer qu'il existe une injection $\mathrm{Fil}^i D_{dR}(V) / \mathrm{Fil}^{i+1} D_{dR}(V) \hookrightarrow (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} t^i \mathbb{C}_K)^{G_K}$, il suffit de montrer qu'on a une suite exacte de cette forme :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Fil}^{i+1} D_{dR}(V) \xrightarrow{\subseteq} \mathrm{Fil}^i D_{dR}(V) \xrightarrow{k_i} (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} t^i \mathbb{C}_K)^{G_K}$$

Le morphisme $k_i : \mathrm{Fil}^i D_{dR}(V) = (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} t^i B_{dR}^+)^{G_K} \rightarrow (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} t^i \mathbb{C}_K)^{G_K}$ dont on a besoin pour construire cette suite est celui obtenu à partir de $\tilde{\theta} : B_{dR}^+ \rightarrow \mathbb{C}_K$ par fonctorialité. Montrons déjà que les éléments de $\mathrm{Fil}^{i+1} D_{dR}(V)$ ont une image nulle par ce morphisme.

Soit $x \in \mathrm{Fil}^{i+1} D_{dR}(V) = (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} t^{i+1} B_{dR}^+)^{G_K}$, on écrit :

$$x = \sum v_i \otimes t^{i+1} b_i = \sum v_i \otimes t^i (t b_i)$$

avec $v_i \in V, b_i \in B_{dR}^+$. L'image par k_i de cet élément est :

$$k_i(x) = \sum v_i \otimes t^i \tilde{\theta}(t b_i)$$

Or, par définition de t (comme générateur de l'idéal $\ker(\tilde{\theta})$, qui contient donc $t b_i$), $\tilde{\theta}(t b_i) = 0$, et donc $k_i(x) = 0$.

Réciproquement, soit $x \in \mathrm{Fil}^i D_{dR}(V)$, qu'on écrit :

$$x = \sum v_i \otimes t^i b_i$$

avec $v_i \in V$ qu'on peut choisir linéairement indépendants et $b_i \in B_{dR}^+$; on suppose l'image de x par k_i nulle. Alors :

$$0 = k_i(x) = \sum v_i \otimes t^i \tilde{\theta}(b_i)$$

Et, puisque les (v_i) forment une famille linéairement indépendante, $\forall i, t^i \tilde{\theta}(b_i) = 0$. On en déduit que $b_i \in \ker(\tilde{\theta}) = (t)$. On écrit alors $b_i = t c_i$ pour des éléments $c_i \in B_{dR}^+$. On a donc :

$$x = \sum v_i \otimes t^i (t c_i) = \sum v_i \otimes t^{i+1} c_i \in \mathrm{Fil}^{i+1} D_{dR}(V)$$

Donc la suite considérée précédemment est bien exacte, ce qui prouve le résultat. \square

Ainsi, les représentations de DE RHAM forment une classe de représentations plus petite que celle des représentations de HODGE–TATE. Dans le cadre de la théorie de HODGE p -adique, des classes encore plus restrictives (et définies selon des principes similaires) ont été définies : ce sont (entre autres) les représentations cristallines et (potentiellement) semi-stables. Là encore, les représentations issues de la géométrie dans des contextes suffisamment réguliers ont tendance à être dans ces classes.

2.2.5 Représentations cristallines

On va passer rapidement sur les représentations cristallines et semi-stables. Pour plus de détails, On peut par exemple consulter [FO08].

Précédemment, on a construit B_{dR} à partir de l'anneau $W(\tilde{E}^+)$ et du morphisme :

$$\begin{aligned} \theta : W(\tilde{E}^+) &\rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}_K} \\ [x] &\mapsto \theta_0(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} (x_i)^{p^i} \end{aligned}$$

On définit, l'anneau A_{cris}^0 à partir de $W(\tilde{E}^+)$ en adjoignant, pour tout $a \in \ker(\theta)$, un élément $\frac{a^m}{m!}$ (vérifiant $m! \frac{a^m}{m!} = a^m$).

Puis on définit :

$$A_{cris} = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} A_{cris}^0 / p^n A_{cris}^0$$

$$B_{cris}^+ = A_{cris}[1/p]$$

On montre que B_{cris}^+ est canoniquement un sous-anneau de B_{dR}^+ , qui contient l'uniformisante t , on peut donc définir :

$$B_{cris} = B_{cris}^+[1/t]$$

Ce sous-anneau de B_{dR} est stable par l'action de GALOIS et, de même que précédemment, on peut définir un foncteur $D_{cris} : V \mapsto (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris})^{G_K}$ et appeler *cristallines* les représentations V telles que $\dim_K D_{cris}(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p}(V)$. Les représentations cristallines sont de DE RHAM.

Ce nom est motivé par le fait suivant : on peut définir un site dit « cristallin » sur les k -schémas lorsque k est un corps parfait, ce qui permet de définir une cohomologie qu'on nomme cristalline. Alors, les représentations galoisiennes induites par cette cohomologie (voir sous-section 2.2.7) sont cristallines au sens précédent.

2.2.6 Représentations semi-stables

On voit brièvement une dernière classe de représentations considérée par la théorie de HODGE p -adique.

Soit \tilde{p} un élément de \tilde{E}^+ d'image p par θ_0 . On définit, dans B_{dR}^+ :

$$\log[\tilde{p}] = \sum_{i \geq 0} (-1)^{n+1} \frac{\left(\frac{[\tilde{p}]}{p} - 1\right)^n}{n}$$

On peut alors définir le sous-anneau de B_{dR} suivant :

$$B_{st} := B_{cris}[\log[\tilde{p}]]$$

et le foncteur D_{st} associé, et la classe des représentations associées, qu'on appelle *semi-stables*.

On a la suite d'implications suivantes (détaillée dans [Ill90], par exemple) :

$$\text{cristalline} \Rightarrow \text{semi-stable} \Rightarrow \text{de DE RHAM} \Rightarrow \text{de HODGE-TATE}$$

Là encore, ce nom a une origine géométrique : dans le cas des variétés algébriques sur un corps k qui sont dites semi-stables, la cohomologie étale de ces variétés définit une représentation galoisienne semi-stable.

Les (déformations des) représentations semi-stables sont au cœur de la preuve de WILES du grand théorème de FERMAT.

2.2.7 Représentations issues de la géométrie

Nous allons ici voir plusieurs moyens d'obtenir des représentations p -adiques de G_K à partir d'objets géométriques. Ce sont les représentations obtenues par de tels moyens que nous qualifierons de « représentations issues de la géométrie ».

Cohomologie étale

Les exemples les plus importants de représentations issues de la géométrie sont données par la cohomologie étale des variétés sur K . Nous détaillons leur construction ici.

Soit X une variété algébrique sur K . Alors X admet une « extension des scalaires » $X_{\bar{K}}$, qu'on peut voir comme $X \times_{\text{Spec}(K)} \text{Spec}(\bar{K})$, c'est-à-dire qu'on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \forall Y & & \\
 \downarrow & \xrightarrow{\exists!} & \\
 X_{\bar{K}} & \longrightarrow & X \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Spec}(\bar{K}) & \longrightarrow & \text{Spec}(K)
 \end{array}$$

On se retrouve alors dans une situation arithmétique, puisque $G_K = \text{Gal}(\bar{K} | K)$ agit sur $X_{\bar{K}}$. Précisons rapidement comment l'action de G_K sur $X_{\bar{K}}$ est définie :

- On définit un morphisme $G_K \times X_{\bar{K}} \rightarrow X$ comme la composition $G_K \times X_{\bar{K}} \rightarrow^{pr_2} X_{\bar{K}} \rightarrow X$.
- On définit un morphisme $G_K \times X_{\bar{K}} \rightarrow \text{Spec}(\bar{K})$ par $(g, x) \in G_K \times X_{\bar{K}} \mapsto g.\tilde{x}$ où \tilde{x} est l'image de x par $X_{\bar{K}} \rightarrow \text{Spec}(\bar{K})$ et où l'action de G_K sur $\text{Spec}(\bar{K})$ est celle déduite de l'action sur \bar{K} par functorialité de Spec .
- Par définition du groupe de GALOIS, l'image de $g.\tilde{x}$ dans $\text{Spec}(K)$ est la même que l'image de \tilde{x} . On peut donc appliquer la propriété universelle du produit fibré pour obtenir un morphisme $G_K \times X_{\bar{K}} \rightarrow X_{\bar{K}}$, c'est-à-dire une action de G_K sur $X_{\bar{K}}$.

On définit la cohomologie étale p -adique sur $X_{\bar{K}}$, notée $H_{\text{ét}}^r(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p)$, par :

$$H_{\text{ét}}^r(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p) = \left(\varprojlim_n H_{\text{ét}}^r(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \right) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$$

(pour plus de détails sur la cohomologie étale, on peut se référer à [Mil13b] ou [Har77])

Un élément de G_K induit un morphisme $X_{\bar{K}} \rightarrow X_{\bar{K}}$, et donc par functorialité de la cohomologie un endomorphisme de $H_{\text{ét}}^r(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p)$. On a ainsi une action de G_K sur la cohomologie étale, c'est-à-dire un morphisme $G_K \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{Q}_p}(H_{\text{ét}}^r(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p))$, et donc une représentation galoisienne.

Théorème 52 (FALTINGS). *Soit X une variété projective lisse sur un corps p -adique K . Alors $H_{\text{ét}}^i(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p)$ est une représentation de DE RHAM de G_K .*

C'est un théorème difficile, qui est au cœur de la théorie de HODGE p -adique. Nous ne le prouverons pas ici, mais nous essaierons d'expliquer les idées en jeu.

Quand $\varphi : R \rightarrow S$ est un morphisme d'anneaux, on note $\Omega_{S|R}$ le représentant du foncteur qui à un S -module M associe les dérivations R -linéaires de S dans M (i.e. les applications $d : S \rightarrow M$ satisfaisant $d(xy) = x(dy) + (dx)y$ et $d(\varphi(x)) = 0$ pour $x \in R$). On note $\Omega_{S|R}^i$ la i -ième puissance extérieure de $\Omega_{S|R}$. Le morphisme identité $\Omega_{S|R} \rightarrow \Omega_{S|R}$ correspond à une dérivation $d : S \rightarrow \Omega_{S|R}$ qui induit (par une formule du type $d(fg_1 \wedge \dots \wedge g_i) = df \wedge dg_1 \wedge \dots \wedge dg_i$) le complexe suivant :

$$0 \rightarrow S \xrightarrow{d} \Omega_{S|R} \xrightarrow{d} \Omega_{S|R}^2 \xrightarrow{d} \Omega_{S|R}^3 \xrightarrow{d} \dots$$

dont la cohomologie s'appelle *cohomologie de DE RHAM algébrique*. On la note $H_{dR}^*(S | R)$. Un principe similaire plus général (qui utilise l'hypercohomologie) permet de définir $H_{dR}^*(X | Y)$ lorsque $X \rightarrow Y$ est un morphisme de schémas (voir [Cha14]). Notamment, quand X est une variété sur un corps K , $H_{dR}^*(X | \text{Spec}(K))$ est un K -espace vectoriel que l'on note $H_{dR}^*(X | K)$. Cette cohomologie définit des représentations galoisiennes qui sont « naturellement » de DE RHAM (c'est-à-dire que cela se montre assez facilement). C'est alors une comparaison entre la cohomologie étale et la cohomologie de DE RHAM, de la forme :

$$B_{dR} \otimes_K H_{dR}^*(X | K) \xrightarrow{\sim} B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H_{\text{ét}}^*(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p)$$

qui permet d'établir le résultat (puisque alors les deux cohomologies ont même image par D_{dR}). On trouve des détails dans [Ill90], ou encore dans [Tsu02]. Pour une preuve (plus accessible mais dont le résultat est plus faible) que ces représentations sont HODGE-TATE, on peut lire [Fen13].

Schémas en groupe, représentations plates

On introduit ici brièvement les schémas en groupe, en suivant [Snoll], pour expliquer comment des représentations galoisiennes apparaissent naturellement au cours de leur étude.

Définition 53 (*K*-schéma en groupe). Un *K*-schéma en groupe est un schéma G sur K muni d'opérations imitant le comportement habituel des groupes : une multiplication $G \times G \rightarrow G$, un élément neutre $e : \text{Spec}(K) \rightarrow G$ et un inverse $G \rightarrow G$, ces opérations étant des morphismes de *K*-schémas vérifiant les propriétés qu'on en attend (associativité de la multiplication, lien entre la multiplication et l'identité, lien entre la multiplication et l'inverse). On définit de même les notions de *K*-schéma en groupe abélien, etc. Les morphismes de schémas en groupe sont les morphismes de schémas envoyant ces opérations les unes sur les autres (autrement dit, les diagrammes attendus commutent).

Soit G un *K*-schéma en groupe. On peut considérer $G(\bar{K})$, c'est-à-dire $\text{Hom}(\text{Spec}(\bar{K}), G)$ dans la catégorie des *K*-schémas. On fait alors plusieurs observations :

- $G(\bar{K})$ est muni d'une structure de groupe. En effet si on a deux morphismes $m_1, m_2 : \text{Spec}(\bar{K}) \rightarrow G$, on peut en définir un troisième en composant leur produit à gauche par la multiplication interne de G . L'opération ainsi définie donne bien un groupe (comme on le remarque en utilisant les opérations identité et inverse), qui sera abélien si G est abélien.
- $G(\bar{K})$ est muni d'une action de $\text{Gal}(\bar{K} | K)$. En effet, si on a un morphisme $m : \text{Spec}(\bar{K}) \rightarrow G$ et un élément $g \in \text{Gal}(\bar{K} | K)$ qui définit un automorphisme g' de $\text{Spec}(\bar{K})$, on peut définir $g.m = m \circ g'$.
- Si la composition p -uple de la multiplication interne de G , qui donne un morphisme $p \times : G \rightarrow G$ bien défini par associativité, s'insère dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \text{Spec}(K) \\ & \searrow p \times & \downarrow e \\ & & G \end{array}$$

on dira que p annule G . On voit que, dans ce cas, le groupe $G(\bar{K})$ est lui aussi annulé par p (il est de p -torsion).

Ainsi, si G est un *K*-schéma en groupe abélien annulé par p , $G(\bar{K})$ est un \mathbb{F}_p -espace vectoriel muni d'une action de $\text{Gal}(\bar{K} | K)$, c'est-à-dire une représentation galoisienne (résiduelle) $\text{Gal}(\bar{K} | K) \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{F}_p}(G(\bar{K}))$.

On dira d'un *K*-schéma en groupe G qu'il est fini plat si le faisceau structurel O_G est localement libre de type fini en tant que $O_{\text{Spec}(K)}$ -module, c'est-à-dire qu'il existe un recouvrement de $\text{Spec}(K)$ par des ouverts affines $U_i = \text{Spec}(R_i)$ tels que les morphismes $G|_{U_i} \rightarrow U_i$ (obtenus en [co]restreignant $G \rightarrow \text{Spec}(K)$), qu'on peut voir comme des morphismes d'anneaux $R_i \rightarrow G_i$, font de G_i un R_i -module libre de type fini. Cela permet de définir une nouvelle catégorie de représentations :

Définition 54 (représentation plate). Soit une représentation galoisienne p -adique :

$$\rho : G_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow GL_n(A)$$

alors ρ est plate si, pour tout idéal $I \subset A$ tel que A/I soit fini, la représentation $G_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow GL_n(A/I)$ induite correspond à un schéma en groupe abélien fini plat annulé par p .

Synthèse

Dans les deux cas précédents, on a essentiellement découpé les objets qui nous intéressaient (les variétés sur K , les K -schémas en groupe) en une partie géométrique sans intérêt arithmétique (la variété sur \bar{K} correspondante, les morphismes de $\text{Spec}(\bar{K})$ dans le schéma en groupe) et une partie arithmétique, incarnée par une représentation galoisienne.

Les représentations obtenues par de tels moyens sont dites « issues de la géométrie ». Elles vérifient typiquement des propriétés additionnelles qui justifient de s'intéresser aux anneaux de déformation associées aux classes restrictives de déformations.

Formes modulaires

On va évoquer rapidement et sans détails une dernière classe particulière de représentations galoisiennes obtenues à partir d'un objet géométrique : les formes modulaires.

Définition 55 (forme modulaire). Une forme modulaire (de degré k) est une fonction holomorphe de l'hyperplan $\mathfrak{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$ dans \mathbb{C} satisfaisant les conditions suivantes :

— Pour tous entiers a, b, c, d tels que $ac - bd = 1$, on a :

$$f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = (cz + d)^k f(z)$$

— f est holomorphe en $i\infty$.

Un point important est qu'il est possible (d'une manière assez compliquée) d'associer à toute forme modulaire ayant d'assez bonnes propriétés une courbe elliptique (on peut trouver des détails dans [Rib95]), et donc une représentation galoisienne (par le procédé décrit dans la sous-section 1.2.1).

A priori, toutes les courbes elliptiques et toutes les représentations galoisiennes ne peuvent pas être obtenues par ce procédé. On dira qu'elles sont modulaires lorsque c'est le cas.

L'étude des déformations modulaires d'une représentation résiduelle modulaire est au cœur de la preuve du dernier théorème de FERMAT, dont on parlera brièvement dans la section 3.1.

2.2.8 Définitions dans le cas global

On considère désormais une représentation galoisienne :

$$\rho : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow GL_n(A)$$

alors ρ est non-ramifiée/semi-stable/plate/... en un nombre premier p si la représentation galoisienne $\rho_p := \rho|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$ l'est, pour un plongement $\bar{\mathbb{Q}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ quelconque.

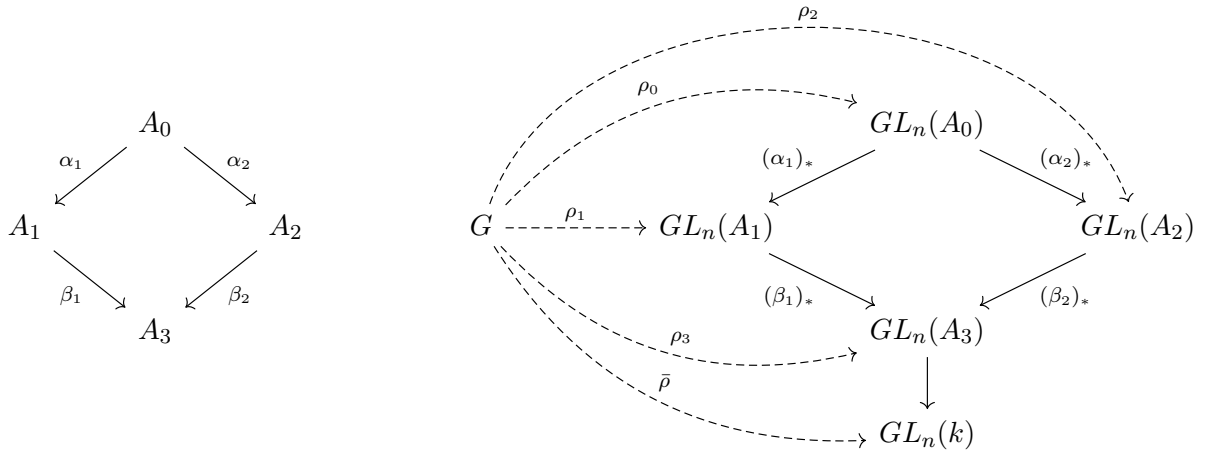
Cela permet de poser des conditions sur les représentations galoisiennes dans le cas global, en imposant par exemple qu'elles en ramifient pas en dehors d'un ensemble fini fixé de nombres premiers.

2.2.9 Résultats sur les anneaux de déformation associés

Toutes les conditions ne sont pas bonnes : par exemple, une condition arbitraire sur les représentations pourrait très bien faire que D ne soit plus un foncteur, ou qu'il ne soit plus représentable.

Théorème 56. *Soit $\bar{\rho} : G \rightarrow GL_n(k)$ une représentation résiduelle et \mathcal{Q} une classe privilégiée de représentations de G . On suppose que :*

- $\bar{\rho}$ est dans \mathcal{Q} ;
- Si une représentation $\rho : G \rightarrow GL_n(A_1)$ est dans \mathcal{Q} et que $\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^0}(A_1, A_2)$ alors $\alpha_*(\rho) : G \rightarrow GL_n(A_2)$ est dans \mathcal{Q} (dit autrement, \mathcal{Q} est stable par poussé-en-avant) ;
- Soit $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{C}^0$ ainsi que des morphismes $\beta_i : A_i \rightarrow A_3$ pour $i \in \{1, 2\}$. On note $A_0 = A_1 \times_{A_3} A_2$. Soit $\rho_0 : G \rightarrow GL_n(A_0)$ une déformation de $\bar{\rho}$ à A_0 et $\rho_i : G \rightarrow GL_n(A_i)$ les déformations induites par ρ_0 pour $i \in \{1, 2, 3\}$. Autrement dit, on a ces diagrammes :



alors ρ_0 est dans \mathcal{Q} si et seulement si ρ_1 et ρ_2 sont dans \mathcal{Q} (le sens direct est une conséquence de l'hypothèse précédente) ;

- Si $A \in \mathcal{C}$ et $\rho : G \rightarrow GL_n(A)$, alors $\rho \in \mathcal{Q}$ si et seulement si la représentation $\rho_k : G \rightarrow GL_n(A/\mathfrak{m}_A^k)$ obtenue par projection est dans \mathcal{Q} pour tout k .

Sous ces hypothèses, $D_{\mathcal{Q}} : A \rightarrow D(A) \cap \mathcal{Q}$ est un foncteur qui admet une enveloppe (et est représentable lorsque $\bar{\rho}$ est absolument irréductible). On dira que \mathcal{Q} est un type de déformation.

Preuve. Précisons le rôle de chaque hypothèse :

- La première hypothèse garantit que $D_{\mathcal{Q}}(\bar{\rho})$ est non vide (et donc un singleton), ce qui nous place dans le cadre du critère de SCHLESSINGER ;
- La deuxième hypothèse nous assure que $D_{\mathcal{Q}}$ est un foncteur, et elle est clairement nécessaire ;
- La troisième hypothèse permet de montrer les conditions du critère de SCHLESSINGER. Déjà, sous cette hypothèse, le morphisme :

$$D_{\mathcal{Q}}(A_1 \times_{A_3} A_2) \rightarrow D_{\mathcal{Q}}(A_1) \times_{D_{\mathcal{Q}}(A_3)} D_{\mathcal{Q}}(A_2)$$

est surjectif lorsque le morphisme correspondant pour D est surjectif. Puisqu'il reste injectif s'il est injectif avec D , et que $D_{\mathcal{Q}}(k[\varepsilon]) \subset D(k[\varepsilon])$ est de dimension finie, cela permet de vérifier le critère de SCHLESSINGER point par point sans souci ;

- La dernière hypothèse permet simplement d'assurer que le foncteur des déformations à des anneaux de coefficients quelconques est bien déterminé par sa restriction à \mathcal{C}^0 .

□

Comme on l'a montré au début de cette section, dans ce cas, on obtient un anneau de déformation (uni)versel qui est un quotient de $\mathfrak{R}_{\bar{\rho}}$.

Exemple 57. Si $\chi : G \rightarrow k^\times$ est un caractère et \mathcal{Q} est la classe des représentations de déterminant χ , alors \mathcal{Q} est un type de déformation (c'est immédiat). En fait, dans ce cas (voir [Gou91], pp. 73-74), lorsque p ne divise pas n , on a :

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{\mathcal{Q}} \widehat{\otimes}_{W(k)} W(k)[[\Gamma]]$$

où $W(k)[[\Gamma]]$ est défini comme dans la sous-section 2.1.1, avec Γ l'abélianisé de la p -complétion de G . Si on se souvient que $W(k)[[\Gamma]]$ est l'anneau de déformation universel associé à un caractère, on peut interpréter ce résultat en disant qu'on a « découpé » le problème en fixant d'une part le déterminant des déformations à un caractère donné, et en faisant varier d'autre part un caractère relevant le déterminant résiduel.

Pour certains exemples de conditions plus compliquées (en lien avec la provenance géométrique des représentations, par exemple), l'étude des anneaux de déformation universels associés à un type de déformation est un sujet riche et largement étudié, qui permet de mieux comprendre le type de déformation en question.

Chapitre 3

Synthèse

3.1 Un mot sur le grand théorème de FERMAT

Dans le contexte d'un tour d'horizon de la théorie des déformations, il serait dommage de ne pas évoquer l'une de ses applications les plus retentissantes, à savoir son rôle dans la preuve du grand théorème de FERMAT par ANDREW WILES. On va l'évoquer de manière très vague, sans preuves, simplement pour clarifier le lien entre l'énoncé du théorème et les déformations de représentations galoisiennes. On suivra principalement le chapitre introductif de [CSS97].

Dans toute la suite, quand on réutilisera les notations vues plus tôt, on prendra $k = \mathbb{F}_p$ (pour un nombre premier p qu'on précisera), et $\mathcal{C}, \mathcal{C}^0, \dots$ les catégories associées (on rappelle que $W(k) = \mathbb{Z}_p$ dans ce cas); on sera toujours dans le cas $n = 2$.

Avant WILES, les mathématiciens FREY, SERRE et RIBET avaient commencé à considérer l'approche suivante :

Soit un contre-exemple au grand théorème de FERMAT de la forme $a^p + b^p = c^p$ ($p \geq 5$ premier, $a, b, c \neq 0$). On considère alors la courbe elliptique sur \mathbb{Q} d'équation suivante :

$$y^2 = x(x - a^p)(x + b^p)$$

Cette courbe elliptique a des propriétés intéressantes, elle est par exemple semi-stable (si on la regarde dans $\bar{\mathbb{Q}}$, ses seules singularités potentielles sont des points doubles, mais aucun *cusp*, ce qui se traduit par le fait que la représentation galoisienne associée est semi-stable). Surtout, en étudiant cette courbe elliptique, RIBET parvint à montrer que, si elle existait, elle ne pouvait pas être associée à une forme modulaire (lire [Rib95] pour le sens précis de cet énoncé). Cela contredisait la conjecture alors ouverte à l'époque (de TANIYAMA–SHIMURA–WEIL) qui prédisait que toute courbe elliptique était modulaire. Autrement dit, l'existence d'un contre-exemple au grand théorème de FERMAT impliquait qu'il existât une courbe elliptique semi-stable non modulaire.

Ce que WILES a montré est que toute courbe elliptique semi-stable sur \mathbb{Q} est modulaire, rejetant ainsi l'hypothèse de l'existence d'un contre-exemple au grand théorème de FERMAT. Pour cela, partant d'une courbe elliptique semi-stable E quelconque :

1. Il a montré que si, pour un nombre premier p quelconque, la représentation résiduelle $\bar{\rho}_p : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ associée était modulaire (et cela vaut alors pour tout p), la courbe elliptique était modulaire ;
2. Il a montré qu'au moins une des deux représentations résiduelles $\bar{\rho}_3$ et $\bar{\rho}_5$ était irréductible, et que si $\bar{\rho}_3$ était irréductible, alors elle était modulaire ;
3. Dans le cas où $\bar{\rho}_5$ est irréductible mais pas $\bar{\rho}_3$, WILES a construit une autre courbe elliptique semi-stable E' telle que $\bar{\rho}'_3$ est irréductible et $\bar{\rho}'_5 \simeq \bar{\rho}_5$: le cas précédent montre alors que $\bar{\rho}'_3$ est modulaire, donc E' est modulaire, et donc $\bar{\rho}'_5 \simeq \bar{\rho}_5$ est modulaire, ce qui achève de montrer que E est modulaire.

Le point qui nous intéresse est le point n° 1. Il était connu avant WILES que si, pour un nombre premier p quelconque, la représentation $\rho_p : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ (définie dans la sous-section 1.2.1) associée à une courbe elliptique E était modulaire, alors la courbe elliptique était modulaire. Ce que WILES a dû faire pour relier la modularité de $\bar{\rho}_p$ et ρ_p a été de montrer que les déformations d'une représentation modulaire (sous de bonnes hypothèses) étaient modulaires. C'est ce qu'on appelle le « *modular lifting problem* ».

Théorème 58 (modular lifting). *Soit une représentation :*

$$\bar{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p).$$

On suppose que (on met entre parenthèses les numéros des sous-sections à consulter pour avoir plus d'informations sur l'hypothèse en question) :

- *Le caractère $\det(\bar{\rho}) : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{F}_p^{\times}$ est le caractère cyclotomique χ_p (caractérisé par $\sigma(\zeta) = \zeta^{x_p(\sigma)}$ pour tout ζ racine p -ième de l'unité) (2.2.1) ;*
- *$\bar{\rho}$ est semi-stable en tout nombre premier (2.2.6, 2.2.8) ;*
- *$\bar{\rho}$ est absolument irréductible (1.4) ;*
- *$\bar{\rho}$ est modulaire (2.2.7) ;*
- *$\bar{\rho}|_{G_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}}$ est absolument irréductible (1.4) ;*

et on note S l'ensemble des nombres premiers différents de p en lesquels $\bar{\rho}$ est ramifiée. Soit un ensemble fini Σ de nombre premiers d'intersection vide avec S .

On dit que $\rho : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ est de type \mathcal{D} si elle satisfait ces quatre hypothèses :

- *ρ a pour déterminant le caractère cyclotomique $G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{Z}_p^{\times}$ (2.2.1) ;*
- *ρ est non-ramifiée en tout nombre premier hors de $S \cup \{p\} \cup \Sigma$ (2.2.2, 2.2.8) ;*
- *ρ est semi-stable en tout nombre premier qui n'est pas dans Σ (2.2.6, 2.2.8) ;*
- *ρ est plate en p si $p \notin \Sigma$ et si ρ_0 est plate en p (2.2.7, 2.2.8).*

Alors toute représentation $\rho : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ de type \mathcal{D} s'insérant dans le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 G_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\rho} & \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p) \\
 & \searrow \bar{\rho} & \downarrow \\
 & & \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)
 \end{array}$$

est modulaire.

Pour prouver ce théorème, WILES s'intéresse au foncteur $D_{\mathcal{D}}$ des déformations de $\bar{\rho}$ qui sont de type \mathcal{D} . À ce foncteur correspond un anneau de déformation universel $\mathfrak{R}_{\mathcal{D}}$.

De même, la théorie des formes modulaires permet de définir un anneau particulier (une algèbre de HECKE) $\mathbf{T}_{\mathcal{D}}$ qui classifie en un sens les formes modulaires associées à des représentations galoisiennes de type \mathcal{D} (d'une manière similaire à la façon dont un anneau de déformation universel classifie les représentations).

Pour notre explication, on peut voir $\mathbf{T}_{\mathcal{D}}$ comme l'anneau universel associé aux déformations modulaires de type \mathcal{D} . Il y a alors une surjection naturelle (voir l'introduction de la section 2.2) :

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{D}} \twoheadrightarrow \mathbf{T}_{\mathcal{D}}$$

dont il suffit de montrer qu'elle est un isomorphisme pour obtenir le théorème. WILES réussit à ramener ce problème à une égalité numérique (selon un principe proche des données cohomologiques décrites dans la sous-section 2.1.2) qu'il démontre.

Dans ce schéma de preuve, on voit toute la force de la théorie développée au cours de ce mémoire : les anneaux de déformation permettent de ramener des problèmes compliqués (par exemple le relèvement de représentations résiduelles modulaires en représentations modulaires) à des questions sur des objets munis d'une structure géométrique, et sur lesquels on a donc des invariants de type « dimension », qui sont autant d'outils additionnels pour affronter le problème.

3.2 La conjecture de FONTAINE–MAZUR

Une des conjectures les plus importantes de l'étude des représentations galoisiennes est la conjecture de FONTAINE–MAZUR, qui propose des critères sur des représentations pour qu'elles soient « issues de la géométrie », c'est-à-dire qu'elles soient obtenues à partir de la cohomologie étale de variétés algébriques.

Conjecture 59 (FONTAINE–MAZUR). *Soit $\rho : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ une représentation irréductible p -adique (c'est-à-dire que V est un $\bar{\mathbb{Q}}_p$ -espace vectoriel de dimension finie), ramifiée en un nombre fini de nombres premiers, et telle que $\rho|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$ soit de DE RHAM.*

Alors il existe une variété projective lisse X sur \mathbb{Q} tels que V soit un quotient d'une sous-représentation de $H_{\text{ét}}^i(X_{\mathbb{C}}, \bar{\mathbb{Q}}_p(j))$ pour des entiers $i \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{Z}$.

S'il s'agit encore d'une conjecture, le succès de l'utilisation des déformations pour la résolution du problème du « modular lifting » suggère une piste, qui a donné des résultats

partiels : essayer de déformer des représentations issues de la géométrie en préservant leur caractère géométrique. Dans l'article [Kis09], KISIN montre un cas particulier de cette conjecture en utilisant cette approche.

3.3 Conclusion

J'espère avoir réussi à communiquer au cours de ce travail une idée fidèle et enthousiasmante de la puissance de la théorie des déformations des représentations galoisiennes, dont j'ai évidemment à peine effleuré les ramifications. Il m'a fallu faire certains choix d'exposition sans doute dommageables, mais j'ai toujours essayé de renvoyer vers des références dont la lecture est censée corriger mes omissions.

Personnellement, ce travail m'aura beaucoup appris, et je suis heureux d'avoir eu l'occasion de travailler sur les déformations des représentations galoisiennes. Notamment, la description des anneaux de déformations à partir d'informations cohomologiques m'a semblé une théorie profonde et un outil puissant, ce qui fait de la section correspondante ma partie préférée de ce travail. J'avoue regretter de n'avoir pas développé davantage la théorie de HODGE p -adique et d'avoir dû faire l'impasse sur nombre de preuves, ainsi que de n'avoir pas eu vraiment le temps de comprendre en détail les formes modulaires, les courbes elliptiques, et plus généralement les questions de modularité. Malgré tout, ce travail aura été une agréable conclusion de mon master, d'autant qu'il m'a permis de réutiliser beaucoup des connaissances que j'avais acquises l'année précédente en M1 lors de mon stage auprès de SZAMUELY TAMÁS et de les approfondir largement.

Je tiens à remercier XAVIER CARUSO de m'avoir proposé ce sujet et d'avoir toujours répondu à mes questions malgré la distance entre nous, et ARIANE MÉZARD d'avoir accepté de faire partie du jury pour ma soutenance, de m'y avoir posé des questions très intéressantes, et de m'avoir suggéré la lecture des travaux de VENKATESH et GALATIUS sur les anneaux de déformation dérivés.

Je remercie aussi mes ami-e-s, notamment A.T., L.G.G. et Y.M.H., d'avoir su me donner la motivation de travailler quand j'en avais besoin et l'occasion de faire autre chose quand il le fallait. Merci entre autres à C.G., R.R., M.R. et E.B. pour les discussions mathématiques toujours passionnées. Et un merci tout particulier à R.R., L.G., P.C., M.D. et P.F. d'être venu-e-s à ma soutenance et d'y avoir apporté des viennoiseries.

Bibliographie

- [AW67] M. F. ATIYAH et C. T. C. WALL. “Cohomology of Groups”. In : J. W. S. CASSELS et A. FRÖHLICH. *Algebraic Number Theory*. 1967.
- [BC09] Olivier BRINON et Brian CONRAD. “Notes on p -adic Hodge Theory”. In : *CMI Summer School*. 2009.
- [Ber] *p-adic Hodge theory seminar*. John Bergdall. <http://math.bu.edu/people/bergdall/seminars/padic-hodge-seminar.html>, 2014.
- [Ber04] Laurent BERGER. “An Introduction to the Theory of p -adic Representations”. In : (2004).
- [Bij13] Stéphane BIJAKOWSKI. *Deformation rings*. <http://stephane-bijakowski.perso.math.cnrs.fr/deformation%20rings.pdf>. 2013.
- [Bö11] Gebhard BÖCKLE. *Deformations of Galois representations*. <https://wwwproxy.iwr.uni-heidelberg.de/groups/arith-geom/boeckle/Deformations-Barca.pdf>. 2011.
- [Cha14] François CHARLES. *The de Rham complex and topics in deformation theory*. <https://www.math.u-psud.fr/~fcharles/CoursAG.pdf>. 2014.
- [Con09] Brian CONRAD. *Modularity lifting seminar*. <http://virtualmath1.stanford.edu/~conrad/modseminar/>. 2009-2010.
- [CSS97] Gary CORNELL, Joseph H. SILVERMAN et Glenn STEVENS, éd. *Modular Forms and Fermat’s Last Theorem*. Springer-Verlag New York, 1997.
- [Dat18] Jean-François DAT. *Introduction à l’arithmétique des courbes elliptiques*. 2018-2019, p. 38.
- [Fen13] Tony FENG. “HODGE-TATE Theory”. Bachelor thesis. Harvard University, 2013. URL : [\url{http://web.stanford.edu/~tonyfeng/hodge_tate.pdf}](http://web.stanford.edu/~tonyfeng/hodge_tate.pdf).
- [FO08] Jean-Marc FONTAINE et Yi OUYANG. *Theory of p -adic Galois Representations*. 2008.
- [Gou91] Fernando Q. GOUVÊA. *Deformations of Galois Representations*. American Mathematical Society, 1991.
- [Har77] Robin HARTSHORNE. *Algebraic Geometry*. Springer-Verlag New York, 1977.
- [Ill90] Luc ILLUSIE. “Cohomologie de De Rham et cohomologie étale p -adique”. In : *Astérisque, tome 189-190*. 1990, p. 325-374.

- [Iye19] Ashwin IYENGAR. *Deformation theory of the trivial mod p Galois representation for GL_n* . 2019. eprint : [arXiv:1904.05996](https://arxiv.org/abs/1904.05996).
- [Kis08] Mark KISIN. “Potentially semi-stable deformation rings”. In : *Journal of the American Mathematical Society* (2008).
- [Kis09] Mark KISIN. “The Fontaine-Mazur Conjecture for GL_2 ”. In : *Journal of the American Mathematical Society* 22.3 (2009), p. 641-690. URL : [\url{https://www.ams.org/journals/jams/2009-22-03/S0894-0347-09-00628-6/S0894-0347-09-00628-6.pdf}](https://www.ams.org/journals/jams/2009-22-03/S0894-0347-09-00628-6/S0894-0347-09-00628-6.pdf).
- [Lac16] Clara LACROCE. “Deformations of Galois Representations”. Mém. de mast. Concordia University, 2016.
- [Maz89] Barry MAZUR. “Deforming Galois representations”. In : *Galois Groups over \mathbb{Q}* . Sous la dir. d’Ihara Y., Ribet K. et Serre J.-P. T. 16. Mathematical Sciences Research Institute Publications, Springer-Verlag, 1989, p. 385-437.
- [Maz97] Barry MAZUR. “An Introduction to the Deformation Theory of Galois Representations”. In : Cornell G., Silverman J.H. et Stevens G. *Modular Forms and Fermat’s Last Theorem*. Springer, New York, NY, 1997.
- [Mil13a] James S. MILNE. *Class Field Theory (4.02)*. Available at www.jmilne.org/math/. 2013.
- [Mil13b] James S. MILNE. *Lectures on Etale Cohomology (v2.21)*. Available at www.jmilne.org/math/. 2013.
- [Neu99] Jürgen NEUKIRCH. *Algebraic Number Theory*. T. 322. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1999, p. 140-141.
- [Rib95] Kenneth A. RIBET. “Galois representations and modular forms”. In : (1995). eprint : [arXiv:math/9503219](https://arxiv.org/abs/math/9503219).
- [Sch68] Michael SCHLESSINGER. “Functors of Artin Rings”. In : *Transactions of the American Mathematical Society* 130.2 (fév. 1968), p. 208-222.
- [Ser62] Jean-Pierre SERRE. *Corps Locaux*. Hermann, Paris, 1962.
- [Ser67] Jean-Pierre SERRE. “Sur les groupes de Galois attachés aux groupes p -divisibles”. In : *Proceedings of a Conference on Local Fields*. Springer-Verlag, 1967, p. 113-131.
- [Ser68] Jean-Pierre SERRE. *Abelian l -adic Representations and Elliptic Curves*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1968. Chap. III, p. 5-7 ; 41-46.
- [Snoll] Andrew SNOWDEN. *Course on Mazur’s theorem – Lectures 6-8*. <http://www-personal.umich.edu/~asnowden/teaching/2013/679/>. Fall 2013.
- [Tsu02] Takeshi TSUJI. “Semi-stable conjecture of Fontaine-Jannsen : a survey”. In : *Astérisque, tome 279*. 2002, p. 323-370.
- [Vak00] Ravi VAKIL. *Deformation theory and moduli spaces*. <https://math.stanford.edu/~vakil/727/>. 2000.