Extension de Yoneda d'un foncteur pleinement fidèle

B.S.

October 13, 2020

(Dans la suite, on désigne systématiquement par $\text{よ}_{\mathcal{C}}$ le foncteur pleinement fidèle $\mathcal{C} \to \mathrm{Psh}(\mathcal{C}) := [\mathcal{C}^{\mathrm{op}} : \mathbf{Set}]$)

Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories, avec $\mathcal{C}$ petite, et F un foncteur $C \to \mathcal{D}$. Alors, on peut définir un foncteur $\tilde{F} : \mathrm{Psh}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Psh}(\mathcal{D})$ de la manière suivante :

$$\tilde{F} = \mathrm{Lan}_{\text{よ}_{\mathcal{C}}}(\text{よ}_{\mathcal{D}} \circ F).$$

Concrètement, si $A \in \mathrm{Psh}(\mathcal{C})$, on a :

$$\tilde{F}A = \int^{c\in\mathcal{C}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Psh}(\mathcal{C})}(\text{よ}_{\mathcal{C}}c, A) \otimes \text{よ}_{\mathcal{D}}(Fc) \overset{\text{Yoneda}}{=} \int^{c\in\mathcal{C}} A(c) \otimes \text{よ}_{\mathcal{D}}(Fc).$$

Ce foncteur étend F au sens où $\tilde{F} \circ \text{よ}_{\mathcal{C}} = \text{よ}_{D} \circ F$. En effet, si $A \in \mathcal{C}$:

$$\begin{aligned}
(\tilde{F} \circ \text{よ}_{\mathcal{C}})A &= \int^{c\in\mathcal{C}} (\text{よ}_{\mathcal{C}}A)(c) \otimes \text{よ}_{\mathcal{D}}(Fc) \\
&= \int^{c\in\mathcal{C}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, A) \otimes \text{よ}_{\mathcal{D}}(Fc) \\
&\overset{\text{Ninja Yoneda}}{=} \text{よ}_{\mathcal{D}}(FA) = (\text{よ}_{\mathcal{D}} \circ F)A
\end{aligned}$$

Calculons :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{Psh}(\mathcal{D})}(\tilde{F}A, \tilde{F}B) &= \mathrm{Hom}\left(\int^{c\in\mathcal{C}} A(c) \otimes \text{よ}_{\mathcal{D}}(Fc), \tilde{F}B\right) \\
&= \int_{c\in\mathcal{C}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Psh}(\mathcal{D})}\Big(A(c) \otimes \text{よ}_{\mathcal{D}}(Fc), \tilde{F}B\Big) \\
&= \int_{c\in\mathcal{C}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}\Big(A(c), \mathrm{Hom}_{\mathrm{Psh}(\mathcal{D})}(\text{よ}_{\mathcal{D}}(Fc), \tilde{F}B)\Big) \\
&\overset{\text{Yoneda}}{=} \int_{c\in\mathcal{C}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}\Big(A(c), (\tilde{F}B)(Fc)\Big) \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathrm{Psh}(\mathcal{C})}(A, \tilde{F}B \circ F)
\end{aligned}$$

De plus, si $a \in \mathcal{C}$:

$$
\begin{aligned}
(\tilde{F}B \circ F)a &= \left(\int^{c \in \mathcal{C}} B(c) \otimes よ_{\mathcal{D}}(Fc) \right)(Fa) \\
&= \int^{c \in \mathcal{C}} B(c) \otimes (よ_{\mathcal{D}}(Fc))(Fa) \\
&= \int^{c \in \mathcal{C}} B(c) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Fa, Fc).
\end{aligned}
$$

Si on suppose que F est pleinement fidèle, alors $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Fa, Fc) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(a, c)$ et donc :

$$
(\tilde{F}B \circ F)a = \int^{c \in \mathcal{C}} B(c) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(a, c) \overset{\text{Ninja Yoneda}}{=} B(a).
$$

Et alors $\tilde{F}B \circ F = B$, ce qui permet de conclure que :

$$
\mathrm{Hom}_{\mathrm{Psh}(\mathcal{D})}(\tilde{F}A, \tilde{F}B) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Psh}(\mathcal{C})}(A, B).
$$

Ainsi, on a le résultat suivant :

Proposition 1 *Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est pleinement fidèle, alors $\tilde{F} : \mathrm{Psh}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Psh}(\mathcal{D})$ est pleinement fidèle. On a alors le diagramme :*

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, hook, "F"] \arrow[d, hook, "よ_{\mathcal{C}}"] & \mathcal{D} \arrow[d, hook, "よ_{\mathcal{D}}"] \\
\mathrm{Psh}(\mathcal{C}) \arrow[r, hook, "\tilde{F}"] & \mathrm{Psh}(\mathcal{D})
\end{tikzcd}
$$