Anneaux Fadéliens, théorie des modèles et catégories

1 Définitions et premières propriétés

Définition 1. Un anneau (unitaire) est dit faiblement Fadélien s'il est non nul et si pour tout $a \neq 0$, il existe x, y tels que $1 = ax + ya$. Il est dit Fadélien s'il vérifie la même condition en remplaçant 1 par un x quelconque.
Un anneau (unitaire) est dit onirique si pour tous x, y, a, il existe b et c tels que $xay = ba + ac$

Nous remarquons immédiatement qu'un anneau Fadélien est faiblement Fadélien, et qu'un anneau faiblement Fadélien est simple. De plus un anneau onirique simple est Fadélien: en effet si R est onirique et $a \in R$, alors $aR + Ra$ est un idéal bilatère par la propriété d'oniricité ($\lambda(ax+ya) = \lambda ax + \lambda ya = ba + ac + \lambda ya$ pour des b, c; et de même pour la multiplication à droite), et si $a \neq 0$, cet idéal est non nul (il contient a), de sorte qu'il est égal à R par simplicité, et on conclut ainsi.
La réciproque est vraie: un anneau Fadélien est onirique (c'est clair en distinguant selon que $a = 0$ ou non -remarquons déjà qu'il y aurait des choses intéressantes à ce sujet en travaillant en logique intuitionniste, comme sur les anneaux en général).
Notons T_{Ring} la théorie (du premier ordre) des anneaux dans le langage $\mathcal{L}_{Ring} = \{+, \times, 0, 1\}$. Dans ce même langage, on définit T_{fFad} comme $T_{Ring} + \{0 \neq 1, \forall a \neq 0, \exists x, y, ax + ya = 1\}$, $T_{Fad} = T_{Ring} + \{0 \neq 1, \forall a \neq 0, \forall b, \exists x, y, ax+ya = b\}$, et $T_{On} = T_{Ring} + \{\forall x, a, y \exists b, c, xay = ba+ac\}$.

Faisons déjà quelques remarques sur la forme de ces théories: T_{Ring} est $\forall$-axiomatisable donc ses modèles sont stables par produit direct, sous-algèbre et quotient, $T_{fFad}, T_{Fad}, T_{On}$ sont $\forall\exists$-axiomatisables donc leurs modèles sont stables par union de chaîne (limite inductive). Il s'agit de théories du premier ordre donc leurs modèles sont stables par ultraproduit.
Les modèles de T_{On} sont aussi stables par produit et quotient; les modèles de T_{fFad}, T_{Fad} n'ont pas d'idéaux bilatères donc pas de congruences non triviales donc il n'y a pas trop d'intérêt à parler de leurs quotients, mais ces modèles ne sont clairement pas stables par produit (si A, B sont deux anneaux non triviaux, $(1, 0)$ ne vérifiera pas la propriété définissant la faible fadélianité).

2 Existence d'anneaux Fadéliens non triviaux

Les premiers exemples d'anneaux Fadéliens sont les anneaux à division, qui sont évidemment Fadéliens. On peut se demander s'il existe des anneaux Fadéliens qui ne sont pas des anneaux à division. Khanfir et al. ont répondu positivement à cette question dans un article fondateur; mais pour ce faire ils ont utilisé (au moins à première vue) l'axiome du choix, notamment pour construire des clôtures différentielles. L'axiome du choix est-il nécessaire pour construire de telles anneaux ?

Lemme 1. *Soit V un modèle de ZF, $L = \mathbb{L}^V$ son univers des constructibles, $\mathcal{L} \in L$ tel que $L \models$ "$\mathcal{L}$ est un langage du premier ordre", $\mathfrak{M} \in L$ tel que $L \models$ "$\mathfrak{M}$ est une $\mathcal{L}$-structure" et $\varphi \in L$ telle que $L \models$ "φ est une formule de $\mathcal{L}$"; alors V satisfait aussi ces formules, et $L \models$ "$\mathfrak{M}$ est un modèle de φ" si et seulement si $V \models$ "$\mathfrak{M}$ est un modèle de φ"*

Preuve. Nous prenons comme définition de langage du premier ordre un triplet $((F_n)_{n<\omega}, (R_n)_{n<\omega}, \mathcal{C})$. Alors la notion de triplet est absolue, de même ω est absolu et "être une famille de domaine ω" est absolu aussi.
De même, "$\mathfrak{M}$ est une $\mathcal{L}$-structure" est absolue au sens où c'est l'abréviation de "$\mathfrak{M}$ est un quadruplet $(M, (I_n)_{n<\omega}, (K_n)_{n<\omega}, J)$ et pour tout $n < \omega$, I_n est une fonction de domaine F_n et d'image

incluse dans $[M^n \to M]$, K_n est une fonction de domaine R_n et d'image incluse dans $\mathcal{P}(M^n)$; et J est une application $\mathcal{C} \to M$"; "f est une application $X \to Y$" étant une formule absolue et $z \subset t$ aussi, cela implique le résultat annoncé.
Nous laissons à la lectrice le soin de prouver qu'il en est de même pour "φ est une $\mathcal{L}$-formule".
Il ne reste plus qu'à montrer que la notion de satisfaction est absolue dans ce cas-ci. Pour ceci nous procédons par induction sur les formules (dans V - sachant que les formules dans V sont les mêmes que celles dans L, puisque $\{\varphi \mid \varphi \in L \wedge \varphi$ est une $\mathcal{L}$-formule $\}$ est un élément de V qui est stable par connecteurs, quantificateurs, et qui contient les formules atomiques).
Nous montrons dans un premier temps par induction (dans V à nouveau, pour la même raison) que les termes sont interprétés de la même manière dans V et dans L. C'est clair pour les variables, et comme la formule "f est une fonction et $f(x) = y$" est absolue, l'étape d'induction ne pose pas de problème. Ainsi pour tout $n < \omega$, $\{t \mid t$ est un terme de $\mathcal{L}$ à variables libres parmi $x_1, ..., x_n$ et l'unique fonction $f : M^n \to M$ qui est son interprétation dans L est aussi son interprétation dans $V\}$ contient les variables $x_1, ..., x_n$ et est stable par application des symboles de fonctions, donc est égal à $\{t \mid t$ est une terme de $\mathcal{L}\}$, ce qui conclut cette étape.

Ensuite, si $R \in R_n$ est un symbole de relation, $t_1, ..., t_n$ sont des termes de $\mathcal{L}$ (selon V et L) avec leurs variables libres parmi $x_1, ..., x_m$ alors $L \models (t_1^{\mathfrak{M}}(x_1, ..., x_m), ..., t_n^{\mathfrak{M}}(x_1, ..., x_m)) \in K_n(R)$ si et seulement si $V \models (t_1^{\mathfrak{M}}(x_1, ..., x_m), ..., t_n^{\mathfrak{M}}(x_1, ..., x_m)) \in K_n(R)$ car par ce qui précède, pour tout i, $t_i^{\mathfrak{M}}(x_1, ..., x_m)$ est le même dans V et L, $K_n(R)$ aussi, et $L \models x \in y$ si et seulement si $V \models x \in y$.

Nous avons donc établi le lemme pour les formules atomiques. Les étapes d'induction correspondant aux connecteurs ne posent aucun problème; et celles correspondant aux quantificateurs non plus car L est un sous-modèle transitif donc pour $y \in L$, si $V \models x \in y$, alors $x \in L$.
Ainsi $\{\varphi \mid \varphi$ est une $\mathcal{L}$-formule et $((L \models$ "$\mathfrak{M}$ est un modèle de φ") si et seulement si $\mathfrak{M} \models \varphi\}$ contient les formules atomiques et est stable par connecteurs et quantificateurs: c'est donc $\{\varphi \mid \varphi$ est une $\mathcal{L}$-formule $\}$.
Ainsi $V \models \forall \varphi$ formule, $((\mathfrak{M} \models \varphi) \iff L \models (\mathfrak{M} \models \varphi))$. Or on sait que $V \models (L \models \psi)$ si et seulement si $L \models \psi$, ce qui donne le résultat attendu. □

On a alors un corollaire immédiat :

Corollaire 1. Soit V un modèle de ZF, $L = \mathbb{L}^V$ son univers des constructibles, $\mathcal{L}, T \in L$ tel que $L \models$ "T est une $\mathcal{L}$-théorie consistante", alors $V \models$ "T est une $\mathcal{L}$-théorie consistante".
En particulier, si $\mathcal{L}$ est un langage fini et T une théorie finie sur ce langage telle que ZFC+GCH$\vdash$ "T admet un modèle", alors ZF$\vdash$ "T admet un modèle".

Preuve. La première partie vient du lemme: on prend un modèle de T dans L, c'en est aussi un dans V, et donc on conlut.
La deuxième vient du théorème de complétude, du résultat de Gödel selon lequel pour tout modèle V de ZF, $L = \mathbb{L}^V$ est un modèle de ZFC+GCH, et de la première partie. □

Corollaire 2. Si on peut prouver avec l'axiome du choix l'existence d'anneaux Fadéliens qui ne sont pas des anneaux à division, alors on peut le prouver sans axiome du choix.

Preuve. On applique le corollaire 1 à $T_{Fad} + \{\exists x \neq 0, \forall y, xy \neq 1\}$ □

3 Un peu de catégories

On utilise les notations anglophones pour les différentes catégories impliquées : $\mathbf{Ring}, \mathbf{Set}$ par exemple. Dans cette section, on liste quelques questions d'intérêt à propos des catégories d'anneaux présentés avant; et on répond à quelques unes.
On note aussi **Fad** (resp. $\mathbf{fFad}, \mathbf{On}$) la sous-catégorie pleine de **Ring** dont les objets sont les anneaux Fadéliens (resp. faiblement Fadéliens, oniriques). Ce sont des catégories qui sont naturellement munies d'un foncteur fidèle vers **Set**: simplement la restriction du foncteur d'oubli; ainsi que d'un foncteur d'inclusion vers **Ring** que l'on omettra la plus souvent des notations.

Par simplicité des anneaux faiblement Fadéliens (et donc des Fadéliens) toute flèche dans $\mathbf{fFad}, \mathbf{Fad}$ est un monomorphisme. On peut aussi s'intéresser aux épimorphismes de ces catégories: s'agit-il tout bêtement des morphismes surjectifs ou a-t-on des exemples ou ce n'est pas le cas, comme dans **Ring** ?

Question 1. Que sont les épimorphismes dans $\mathbf{Fad}, \mathbf{fFad}$?

On peut aussi s'intéresser aux différents types de limites et de colimites qui existent dans ces catégories; remarquons qu'ils peuvent être différents des produits usuels.
Ce n'est pas le cas pour **On**, qui est stable par produit direct, et donc qui admet des produits.
Mais par exemple $\mathbb{Q} \in Ob(\mathbf{fFad})$, on peut se demander si son produit avec lui-même existe, et si oui ce qu'il vaut (en effet dans la catégorie des corps, ce produit existe et est égal à $\mathbb{Q}$). Soit A un anneau faiblement Fadélien, $f, g : A \to \mathbb{Q}$ des morphismes. Alors ils sont injectifs car A est simple, donc A est commutatif, donc c'est un corps; donc il est isomorphe à $\mathbb{Q}$ et $f = g$ sont le même (car unique) isomorphisme $A \to \mathbb{Q}$. Donc $\mathbb{Q}$ est le produit de $\mathbb{Q}$ avec lui-même dans la catégorie **fFad** (et aussi dans **Fad** par le même argument).

En particulier (!) l'inclusion $i : \mathbf{fFad} \to \mathbf{On}$ ne préserve pas la produit, donc n'admet pas d'adjoint à gauche, i.e. un anneau onirique n'a en général pas d'anneau "faiblement Fadélien libre" associé. On peut faire le même commentaire pour l'inclusion $\mathbf{fFad} \to \mathbf{Ring}$ et le foncteur d'oubli $\mathbf{fFad} \to \mathbf{Set}$: ainsi il n'y a pas d'anneau (faiblement) Fadélien libre (ce qui n'est pas surprenant car la théorie des anneaux (faiblement) Fadéliens n'est pas équationnelle). Ainsi en général, le problème universel suivant n'a pas de solution: si A est un anneau (onirique) on cherche un anneau (faiblement) Fadélien B et un morphisme $f : A \to B$ tel que pour tout anneau (faiblement) Fadélien C, tout morphisme $A \to C$ se factorise de manière unique via un morphisme $B \to C$ (sinon l'inclusion aurait un adjoint à gauche etc.).
On peut se demander ce qu'il en est pour **On**.

Question 2. L'inclusion $\mathbf{On} \to \mathbf{Ring}$ admet-elle un adjoint à gauche ?
En termes moins pédants, étant donné un anneau A, existe-t-il un anneau onirique B et un morphisme $f : A \to B$ tel que pour tout anneau onirique C, tout morphisme $A \to C$ se factorise de manière unique par un morphisme $B \to C$?

L'étude des limites dans $\mathbf{fFad}, \mathbf{Fad}$ semble ainsi ardue au vu de ce que de simples produits peuvent donner; tandis que celle dans **On** semble plus raisonnable. Aussi on peut se demander:

Question 3. **On** est-elle complète, i.e. admet-elle toutes les limites ?
Au vu de ce qui précède, ça se reformule en : admet-elle des égaliseurs ?

Qu'en est-il des colimites, et de la question associée au niveau des inclusions, i.e. ont-elles des adjoints à droite ? Dans **Ring**, le coproduit de deux anneaux est leur produit tensoriel. Ainsi on est rapidement amené à

Question 4. Le produit tensoriel de deux anneaux oniriques (resp. Fadélien, faiblement Fadélien) est-il onirique (resp. Fadélien, faiblement Fadélien) ?

Pour l'adjonction, on formule le problème universel suivant :

Question 5. Etant donné un anneau A, existe-t-il un anneau onirique B et un morphisme $B \to A$ tel que pour tout anneau onirique C, tout morphisme $C \to A$ se factorise par un morphisme $C \to B$?
Même question en remplaçant "onirique" par "(faiblement) Fadélien" ?
Etant donné un anneau onirique A, existe-t-il un anneau (faiblement) Fadélien B et un morphisme $B \to A$ tel que pour tout anneau (faiblement) Fadélien C, tout morphisme $C \to A$ se factorise par un morphisme $C \to B$?
En termes plus pédants, les inclusions **On** (resp. $\mathbf{fFad}, \mathbf{Fad}$) $\to$ **Ring**, **fFad** (resp. **Fad**) $\to$ **On** ont-elles un adjoint à droite ?

Evidemment ces questions ne sont pas indépendantes les unes des autres, il y a des chaînes d'implications.

4 Sur les idéaux des produits d'anneaux (faiblement) Fadéliens, oniriques

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'anneaux. On peut se demander à quoi ressemblent les idéaux de $\prod_{i\in I} A_i$. C'est ce qu'on va faire pour des A_i (faiblement) Fadéliens, oniriques.

Au début on ne fixe aucune condition sur les A_i. Soit A l'anneau produit et $K \subset A$ un idéal bilatère. Soit $J \subset I$, on dit que $J \in \mathcal{U}_K$ si et seulement si pour tout $a \in A$, si $\{j, a_j = 0\} \supset J$, alors $a \in K$.
Montrons que $\mathcal{U}_K$ est un filtre sur I: clairement $I \in \mathcal{U}_K$; et $\mathcal{U}_K$ est clos vers le haut.
Si $J, W \in \mathcal{U}_K$, soit $a \in A$ tel que $\{j, a_j = 0\} \supset J \cap W$. On définit alors $b, c \in A$ de la manière suivante : si $j \in J \cap W, b_j = c_j = a_j = 0$, si $j \in J \setminus W, b_j = 0, c_j = a_j$, si $j \notin J, b_j = a_j, c_j = 0$. Alors $b + c = a$. De plus $\{j, b_j = 0\} \supset J$ et $\{j, c_j = 0\} \supset W$ et donc $b, c \in K$ donc $a \in K$; donc $J \cap W \in \mathcal{U}_K$, qui est donc bien un filtre.

On peut donc associer à $\mathcal{U}_K$ un idéal Ω qui est l'idéal des suites nulles $\mathcal{U}_K$-presque partout, i.e. $a \in \Omega \iff \{j, a_j = 0\} \in \mathcal{U}_K$. Il est clair au vu de la définition que $\Omega \subset K$.

Allons plus loin: soit $\mathcal{U}. : \{K \subset A, K \text{ idéal de } A\} \to \{\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(I), \mathcal{F} \text{ filtre sur } I\}$ et $\Omega. : \{\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(I), \mathcal{F} \text{ filtre sur } I\} \to \{K \subset A, K \text{ idéal de } A\}$ les applications associées aux constructions qui précèdent; ces deux ensembles étant naturellement munis d'un ordre (l'inclusion).
Alors $\Omega. \dashv \mathcal{U}.$: on a affaire à une adjonction (en langage de théorie des ordres, une connexion de Galois).
En effet soit K un idéal, $\mathcal{F}$ un ultrafiltre. Et supposons $\Omega_{\mathcal{F}} \subset K$, et soit $J \in \mathcal{F}$, et finalement $b \in A$ tel que $\{j, b_j = 0\} \supset J$. Alors $b \in \Omega_{\mathcal{F}}$ donc $b \in K$. Donc $J \in \mathcal{U}_K$.
Réciproquement, supposons $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}_K$ et soit $b \in \Omega_{\mathcal{F}}$. Alors $\{j, b_j = 0\} \in \mathcal{F} \subset \mathcal{U}_K$ donc $b \in K$.
On a donc $\Omega_{\mathcal{F}} \subset K \iff \mathcal{F} \subset \mathcal{U}_K$, ce qui est ce qu'on annonçait. Je ne sais pas si on peut tirer des résultats intéressants de cette adjonction...

Supposons désormais K maximal. Nous allons alors montrer que $\mathcal{U}_K$ est un ultrafiltre et en déduire des choses intéressantes.
Soit en effet $J \subset I, J \notin \mathcal{U}_K$. Alors par définition, il existe $a \in A$, $a \notin K$ tel que $\{j, a_j = 0\} \supset J$. Soit $W = I \setminus J$, nous voulons montrer que $W \in \mathcal{U}_K$.
Soit donc $b \in A$ tel que $\{j, b_j = 0\} \supset W$. Notons $\pi : A \to A/K$ le morphisme canonique. Alors comme K est maximal, A/K est simple et $\pi(a) \neq 0$ donc l'idéal bilatère engendré par $\pi(a)$, $\sum_{n<\omega} (A/K)\pi(a)(A/K)$ est égal à A/K tout entier. En particulier il contient $\pi(b)$ donc il existe $n < \omega$ et des $\lambda_i, \mu_i \in A, c \in K$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a \mu_i = b + c$.
Par hypothèse sur b, si $j \in W$ on a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_j \mu_i = c_j$ et si $j \notin W$, $j \in J$ et donc $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_j \mu_i = 0$.
Donc il existe $d \in A$ tel que $dc = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a \mu_i$ et donc $(d-1)c = b$ et donc $b \in K$ car $c \in K$.
Etant parti d'un b quelconque, on en déduit que $W \in \mathcal{U}_K$, ce qui est ce qu'on voulait: $\mathcal{U}_K$ est un ultrafiltre.

Dans le cas où les A_i sont des corps ou des anneaux à division, on en déduit automatiquement que $\Omega_{\mathcal{U}_K}$ (noté plus sobrement Ω au début de la discussion) est un idéal maximal, et comme il est inclus dans K, qu'il est égal à K; et cela permet de classifier les idéaux maximaux des produits d'anneaux à division.
Seulement dans le cas où les A_i sont seulement supposés simples, je ne vois pas trop comment faire... Heureusement qu'on s'intéresse aux anneaux (faiblement) Fadéliens, et pas aux anneaux simples !

En effet dans ce cas $A/\Omega_{\mathcal{U}_K}$ (que j'aime noter $\prod_{i\in I} A_i/\mathcal{U}_K$ en bon logicien qui se respecte) est aussi (faiblement) Fadélien, via le théorème de Los (mettre les bons accents sur le L et le o), et donc simple, et donc $\Omega_{\mathcal{U}_K}$ est maximal, et donc égal à K ! Ainsi nous avons :

Théorème 1. *Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'anneaux (faiblement) Fadéliens. Alors les idéaux bilatères maximaux de $\prod_{i\in I} A_i$ sont précisément les idéaux induits par les ultrafiltres sur I.*

Ce qui est remarquable, c'est qu'on peut désormais aussi classifier les idéaux des produits réduits d'anneaux (faiblement) Fadéliens.

Théorème 2. *Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'anneaux (faiblement) Fadéliens, et $\mathcal{F}$ un filtre sur I. Alors les idéaux bilatères maximaux de $\prod_{i\in I} A_i/\mathcal{F}$ (qui est un anneau onirique d'après la première section) sont précisément les idéaux induits par les ultrafiltres sur I qui étendent $\mathcal{F}$.*

Preuve. Soit K un idéal bilatère maximal du produit réduit, et soit $\pi : \prod_{i\in I} A_i \to \prod_{i\in I} A_i/\mathcal{F}$ la projection canonique.
Alors $\pi^{-1}(K)$ est un idéal bilatère maximal de $\prod_{i\in I} A_i$ qui contient l'idéal des suites nulles $\mathcal{F}$-presque partout. Par le théorème précédent, $\pi^{-1}(K)$ est induit par un ultrafiltre $\mathcal{U}$, qui vérifie $\Omega_{\mathcal{F}} \subset \Omega_{\mathcal{U}}$, et donc par l'adjonction $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}_{\Omega_{\mathcal{U}}}$. Mais la preuve du théorème 1 (ou simplement du abstract nonsense sur les connexions de Galois) donne que ce filtre est précisément $\mathcal{U}$, donc $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$. On a alors la conclusion désirée. $\square$