Interversions de limites : un récapitulatif

On énumère ici des théorèmes permettant d'intervertir des limites, des sommes, des intégrales dans une expression.

Sauf dans les cas où le résultat est hors-programme ou nécessite un raisonnement, les énoncés seront toujours donnés dans le cas le plus général (cas complexe si le cas réel s'en déduit, suites si l'énoncé pour les séries est immédiat etc...).

0 Généralités sur les suites et séries

On dit $(u_n) \to l$ si $\forall \varepsilon, \exists n_0 / n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - l| \leqslant \varepsilon$. (u_n) converge ssi $\forall \varepsilon, \exists n_0, p \geqslant n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_p - u_n| \leqslant \varepsilon$ (critère de Cauchy).

On dit que la série $\sum u_n$ converge (noté cv) si $(\sum_{k=0}^n u_k)_{n\in\mathbb{N}} = (S_n)$ converge, cela ssi $\forall \varepsilon, \exists n_0 \,/\, p \geqslant n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n + \ldots + u_p| \leqslant \varepsilon$. On dit que $\sum u_n$ converge absolument (noté acv) si $\sum |u_n|$ cv (ce qui implique $\sum u_n$ cv). On pose en général $S = \lim S_n = \sum_{k=0}^{\infty} u_n$ la somme de la série et $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_n$ la suite des restes.

On dit que la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers u si $\forall x, u_n(x) \to u(x)$, c'est-à-dire si $\forall x, \forall \varepsilon, \exists n_0 / n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n(x) - u(x)| \leqslant \varepsilon$. On dit que la convergence est *uniforme* (cvu) si $\|u_n - u\|_\infty \to 0$, ce qui revient à dire $\forall \varepsilon, \exists n_0 / n \geqslant n_0 \Rightarrow \forall x, |u_n(x) - u(x)| \leqslant \varepsilon$. Une suite (u_n) cvu ssi $\forall \varepsilon, \exists n_0 / p \geqslant n \geqslant n_0 \Rightarrow \forall x, |u_p(x) - u_n(x)| \leqslant \varepsilon$. On définit de plus les mêmes notions pour les séries de fonctions $\sum u_n(x)$, en considérant la suite $(S_n(x))$ des sommes partielles.

Pour les séries de fonctions, on dit que $\sum u_n$ converge *normalement* (cvn) lorsque $\sum \|u_n\|_\infty$ est une série (numérique) convergente. On a alors la convergence uniforme de $\sum u_n$ vers une fonction S mais aussi, en chaque point x, la convergence absolue de $\sum u_n(x)$ vers $S(x)$.

Il sera courant d'utiliser comme hypothèse la convergence uniforme ou normale *sur tout segment* (notées cvus/cvns).

Résultats généraux (pour des intégrales sur $[a, b[$, mais similaires pour les séries sur $\mathbb{N}$) **:**

f et g sont deux fonctions (resp. deux suites) $C_m^0([a, b[)$ positives et $\lambda \neq 0$.

- Si g n'est pas intégrable (resp. n'est pas sommable), en posant $F = \int_a^x f$, $G = \int_a^x g$ (resp. les sommes partielles), alors : $f = O(g)$, $f = o(g)$ et $f \sim \lambda g$ impliquent respectivement $F = O(G)$, $F = o(G)$ et $F \sim \lambda G$.

- Si g est intégrable (resp. sommable), en posant $F = \int_x^b f$, $G = \int_x^b g$ (resp. les restes), alors : $f = O(g)$, $f = o(g)$ et $f \sim \lambda g$ impliquent respectivement $F = O(G)$, $F = o(G)$ et $F \sim \lambda G$.

On a aussi le théorème de Fubini (par exemple pour les séries) : Si pour tout n, $(u_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$ est sommable de somme v_n et que la famille $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable alors $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} u_{n,m} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,m}$.

1 Séries entières

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et R le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$, càd $R = \sup \{r \in \mathbb{R}^+ / (a_n r^n) \text{ bornée}\}$. Par ailleurs, on pose $S(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ pour tout x tel que la série converge.

Théorème 1. *$\sum a_n x^n$ converge normalement sur tout disque fermé de $\{x \in \mathbb{C} / |x| < R\}$. Par ailleurs sur $]-R, R[$, la fonction-somme est C^∞ et les dérivées/primitives sont obtenues en dérivant/primitivant terme à terme et ont toutes même rayon de convergence R.*

Théorème 2. *(Théorème d'Abel, cas réel) Si $S(R)$ ou $S(-R)$ est défini, alors S est continue à gauche en R (resp. à droite en $-R$) et on a cvu sur $[0, R]$ (resp. $[-R, 0]$). (Se montre directement si $\sum a_n(\pm R)^n$ acv ou alternée)*

2 Suites et séries simplement convergentes de fonctions

Dans la suite, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et u_n est une suite de fonctions de $C_m^0(I, K)$ qui converge (simplement) vers $u \in C_m^0(I, K)$.

Théorème 3. *(Convergence dominée) S'il existe $\varphi \in C_m^0$ intégrable telle que $\forall n,\ |u_n| \leqslant \varphi$ alors les u_n et u sont intégrables et $\int_I u_n \rightarrow \int_I u$.*

Théorème 4. *(Intégration terme à terme) Si $\forall n, u_n$ est intégrable, si $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ existe et est C_m^0 et si la série numérique $\sum \left(\int_I |u_n|\right)$ converge, alors S est intégrable et $\int_I S = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I u_n$.*

3 Intégrales à paramètre

Dans la suite, I et J désignent des intervalles de $\mathbb{R}$, K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $f: I \times J \rightarrow K$ est une fonction.

Théorème 5. *(Continuité) On fait les hypothèses suivantes:*

- *$\forall x \in J$, $f(\bullet, x): t \mapsto f(t, x)$ est C_m^0 sur I.*
- *$\forall t \in I, f(t, \bullet): x \mapsto f(t, x)$ est **continue** (et pas seulement par morceaux) sur J.*
- *$\exists \varphi \in C_m^0(I, \mathbb{R}^+)$ **intégrable** telle que $\forall t \in I, \forall x \in J, |f(t, x)| \leqslant \varphi(t)$ (ou : sur tout segment de J).*

Alors $F: x \in J \mapsto \int_I f(t, x) \mathrm{dt}$ est définie sur J et continue.

Faire attention à ne pas confondre t (var. d'intégration, $\in I$) et x (var. dont F dépend, $\in J$) et à bien vérifier la **continuité** par rapport à x et non la continuité par morceaux !

Théorème 6. *(Dérivation sous le signe somme) On fait les hypothèses suivantes:*

- *$\forall x \in J$, $f(\bullet, x)$ est C_m^0 intégrable sur I.*
- *La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = (f(t, \bullet))'$ existe en tout point ; $\forall x, \frac{\partial f}{\partial x}(\bullet, x)$ est C_m^0 ; $\forall t, \frac{\partial f}{\partial x}(t, \bullet)$ est $\boldsymbol{C^0}$.*
- *$\exists \Psi \in C_m^0(I, \mathbb{R}^+)$ **intégrable** telle que $\forall t \in I, \forall x \in J, \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)\right| \leqslant \Psi(t)$ (ou : sur tout segment de J).*

Alors $F: x \in J \mapsto \int_I f(t, x) \mathrm{dt}$ est définie sur J de classe C^1 et $\forall x \in J, F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \mathrm{dt}$.

Pour dériver k fois, on met les hypothèses fortes (celles du théorème 5) sur la dérivée partielle k-ième et les hypothèses « faibles » (C_m^0 intégrable à x fixé) sur les dérivées partielles d'ordre inférieur.

4 Suites et séries uniformément convergentes de fonctions

Ici, (u_n) désigne une suite de fonctions $I \rightarrow \mathbb{C}$ de limite (simple a priori) u.

Théorème 7. *(Continuité) Si la convergence est uniforme et si les u_n sont continues sur I, alors u est continue sur I. Il en va de même des sommes de séries uniformément convergentes de fonctions continues.*

Théorème 8. *(Double limite) Si I est un intervalle ouvert, par exemple de la forme (a,b[, alors la convergence uniforme de (u_n) vers u et l'existence pour tout n de $\lim_{x \rightarrow b^-} u_n(x) = l_n$ implique la convergence de la suite (l_n) vers $l = \lim_{x \rightarrow b^-} u(x)$. De même pour les sommes de séries ($\lim \sum_{\mathrm{cvu}} = \sum \lim$).*

Théorème 9. *(Intégration) Si I est un segment et si $u_n \in C_m^0 \overset{\mathrm{cvu}}{\rightarrow} u \in C_m^0$ alors $\int_I |u - u_n| \rightarrow 0$ et $\int_I u_n \rightarrow \int_I u$. Pour les séries, on a de même : si $\sum u_n \overset{\mathrm{cvu}}{\rightarrow} S \in C_m^0$ alors $\sum \left(\int_I u_n\right) \rightarrow \int_I S$.*

Théorème 10. *(Primitivation) Si I est un intervalle, que $u_n \in C_m^0 \overset{\mathrm{cvus}}{\rightarrow} u \in C_m^0$ alors si on choisit $a \in I$ et qu'on pose $U_n(x) = \int_a^x u_n$ et $U(x) = \int_a^x u$, on a $U_n \overset{\mathrm{cvus}}{\rightarrow} U$.*

Théorème 11. *(Dérivation) Si I est un intervalle, si $u_n \in C^1 \overset{\mathrm{cvs}}{\rightarrow} u$ et si $u_n' \overset{\mathrm{cvus}}{\rightarrow} v$, alors $u_n \overset{\mathrm{cvus}}{\rightarrow} u \in C^1$ et u'=v. De meme pour les sommes de séries (si cvs + cvus des dérivées alors $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(\sum\ ) = \sum \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\right)$).*

De même, pour dériver k fois, on met les hypothèses fortes (cvus) sur la dérivée k-ième et les hypothèses de convergence simple sur les dérivées d'ordre inférieur.