Exercice 1. Soit $Y_0 \in C^0([0,a],\mathbb{R}^+)$ et $\forall n \in \mathbb{N}, Y_{n+1}: x \mapsto 2\int_0^x \sqrt{Y_n(t)}\mathrm{dt}$. Etudier (Y_n).

Si $Y_0 = 0$, alors la suite est stationnaire à 0 donc le comportement est clair. On suppose donc $Y_0 \neq 0$.

On remarque que pour tout $n \geqslant 1$, la fonction Y_n est croissante. En posant $h = \inf\{x \in [0,a] / Y_0(x) \neq 0\}$, il est clair que Y_1 est nulle sur $[0,h]$. Par ailleurs, Y_1 ne s'annule pas sur $]h,a]$: en effet, si $x > h$, il existe $h' \in [h,x]$ tel que $Y_0(h') \neq 0$, or Y_0 est continue en h' donc minorée sur un certain segment $[h'-\varepsilon, h'+\varepsilon]$ par $\frac{Y_0(h')}{2} > 0$, et $\int_0^x \sqrt{Y_0(t)}\mathrm{dt} \geqslant \int_{h'-\varepsilon}^{h'} \sqrt{\frac{Y_0(h')}{2}}\mathrm{dt} = \varepsilon\sqrt{\frac{Y_0(h')}{2}} > 0$.

Commençons par remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \leqslant h$, on a $Y_n(x) = 0$ (récurrence immédiate). Nous nous intéresserons donc désormais à ce qui se passe sur $]h,a]$.

Soit $k \in]h, a[$. Alors Y_1 est strictement positive (et continue) sur le segment $[k, a]$. Soit $m = \inf_{x\in[k,a]} Y_1(x) > 0$ et $M = \sup_{x\in[h,a]} Y_1(x) < +\infty$.

$$\forall x \geqslant h, Y_2(x) \leqslant 2\int_h^x \sqrt{M}\mathrm{dt} = 2\sqrt{M}(x-h)$$

$$\forall x \geqslant h, Y_3(x) \leqslant 2\sqrt{2\sqrt{M}}\int_h^x \sqrt{t-h}\mathrm{dt} = 2\sqrt{2\sqrt{M}}\left(\frac{2}{3}\right)(x-h)^{3/2}$$

$$\forall x \geqslant h, Y_4(x) \leqslant 2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{M}}}\sqrt{\frac{2}{3}}\int_h^x (t-h)^{3/2}\mathrm{dt} = 2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}M^{\frac{1}{8}}\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{4}{7}\right)(x-h)^{7/4}$$

Et ainsi de suite. Une récurrence facile nous donne en effet :

$$\forall n \geqslant 2, \forall x \geqslant h, Y_n(x) \leqslant 2^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}} \times M^{\frac{1}{2^n}} \times \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{2^{k-1}}{2^k-1}\right)^{2^{k-n}} \times (x-h)^{\frac{2^n-1}{2^{n-1}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} (x-h)^2$$

(Voir la note[1] pour les détails du calcul de la limite)

On obtient de la même manière une minoration :

$$\forall n \geqslant 2, \forall x \geqslant k, Y_n(x) \geqslant 2^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}} \times m^{\frac{1}{2^n}} \times \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{2^{k-1}}{2^k-1}\right)^{2^{k-n}} \times (x-k)^{\frac{2^n-1}{2^{n-1}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} (x-k)^2$$

Soit $I(x) = \liminf Y_n(x)$. On a $\forall k \in]h,x[, I(x) \geqslant (x-k)^2$ donc $I(x) \geqslant \sup_{k\in]h,x[}(x-k)^2 = (x-h)^2$.

Soit $S(x) = \limsup Y_n(x)$. De $(x-h)^2 \leqslant I(x) \leqslant S(x) \leqslant (x-h)^2$ on déduit $I(x) = S(x) = (x-h)^2$. Cela montre $\forall x > h, Y_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (x-h)^2$.

On a donc prouvé que (Y_n) converge simplement vers la fonction f_h: $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant h \\ (x-h)^2 & \text{si } x > h \end{cases}$, où $h = \inf\{x \in [0,a] / Y_0(x) \neq 0\}$.

Je ne sais pas si la convergence est uniforme. Je soupçonne néanmoins qu'elle ne l'est **pas** en général car m s'approche de 0 lorsque $k \to h$, ce qui fait qu'on doit aller de plus en plus loin pour avoir $m^{\frac{1}{2^n}}$ proche de 1. Cela semble indiquer que la convergence n'est pas toujours uniforme.

---

1. On a $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} \to 2$, $M^{\frac{1}{2^n}} \to M^0 = 1$, $\frac{2^n-1}{2^{n-1}} \to 2$.

Le produit mérite qu'on s'y intéresse, notons le P_n. Alors $\ln(P_n) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=2}^n -\left(\ln(2) + \ln\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)\right)2^k$. On sait $-2^k\ln\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \to 1$ donc $-\frac{1}{2^n}\sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)2^k \sim \frac{n}{2^n} \to 0$ (en utilisant le théorème de Cesaro). Par ailleurs $\frac{-1}{2^n}\sum_{k=2}^n \ln(2)2^k = \frac{-\ln(2)}{2^n} \times 4 \times \frac{2^{n-1}-1}{2-1} \to -2\ln(2)$ donc $P_n \to \exp(-2\ln(2)) = 2^{-2} = \frac{1}{4}$.