Courbe de Verne

Voilà un énoncé de problème apparaissant dans *Paris au XXe siècle*, de Jules Verne :
« On donne deux circonférences OO' : d'un point A pris sur O, on mène des tangentes à O' ; on joint les points de contact de ces tangentes : on mène la tangente en A à la circonférence O ; on demande le lieu du point d'intersection de cette tangente avec la corde des contacts dans la circonférence O' »

Nous étudierons ce problème en coordonnées cartésiennes. La résolution est accessible à un élève de première à l'aise en trigonométrie.

I. Réduction

À un changement de repère et donc à une similitude près, la situation se ramène à celle-ci :

- C est le cercle unité, de centre O et de rayon 1.
- On repère le point A par l'angle orienté ϑ qu'il forme avec l'horizontale : A=(cos ϑ, sin ϑ).
- C' est le cercle de centre O'=(d,0) et de rayon r.

II. Équation de la tangente à C en A

Commençons par la recherche de l'équation (presque immédiate) de la tangente à C en A.
Cette droite a pour vecteur normal $\vec{OA}=(\cos\theta,\sin\theta)$ et a donc une équation de la forme $\cos\theta\, x+\sin\theta\, y=cte_1$. Elle passe par A donc $cte_1=\cos\theta\, x_A+\sin\theta\, y_A=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$.
L'équation recherchée est donc : $\cos\theta\, x+\sin\theta\, y=1$.

III. Équation générale des tangentes à C'

On écrit l'équation de la tangente à C' passant par le point $B_\varphi=O'+r\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$. Un vecteur normal en est (cos φ, sin φ) donc l'équation est de la forme : $\cos\varphi\, x+\sin\varphi\, y=cte_2$.
Au point B_φ , on a : $cte_2=\cos\varphi(d+r\cos\varphi)+\sin\varphi\, r\sin\varphi=d\cos\varphi+r(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=r+d\cos\varphi$.
L'équation cherchée est donc $\cos\varphi\, x+\sin\varphi\, y=r+d\cos\varphi$.

IV. Recherche des tangentes passant par A

On cherche les tangentes à C' passant par A, ce qui équivaut à avoir φ vérifiant :
$\cos\varphi\cos\theta+\sin\varphi\sin\theta=r+d\cos\varphi$ ou encore $\cos(\varphi-\theta)=r+d\cos\varphi$.
Plutôt que de chercher la valeur de φ, nous recherchons la valeur de $t=\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ qui vérifie

$\cos\varphi=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin\varphi=\frac{2t}{1+t^2}$.

L'équation donne donc, une fois multipliée par $1+t^2$: $(1-t^2)\cos\theta+(2t)\sin\theta=r(1+t^2)+d(1-t^2)$.
En réorganisant les termes, on obtient l'équation (E) du second degré en t :
$(-r+(d-\cos\theta))t^2+(2\sin\theta)t+(-r-(d-\cos\theta))=0$ de discriminant $4(d^2-r^2-2d\cos\theta+1)$.
Cette équation est en fait caractéristique du problème. On pourrait la résoudre mais on retiendra simplement qu'elle a deux solutions t_1 et t_2 , qui correspondent aux deux points d'intersection entre C' et les tangentes à C' passant par A.

V. Équation de la corde entre les points de tangence

En supposant que ces points ne sont pas alignés verticalement, on calcule la pente λ de la corde :

$$\lambda=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(r\sin\varphi_1)-(r\sin\varphi_2)}{(d+r\cos\varphi_1)-(d+r\cos\varphi_2)}=\frac{\sin\varphi_1-\sin\varphi_2}{\cos\varphi_1-\cos\varphi_2}=\frac{\frac{2t_1}{1+t_1^2}-\frac{2t_2}{1+t_2^2}}{\frac{1-t_1^2}{1+t_1^2}-\frac{1-t_2^2}{1+t_2^2}}=2\frac{t_1(1+t_2^2)-t_2(1+t_1^2)}{(1-t_1^2)(1+t_2^2)-(1-t_2^2)(1+t_1^2)}$$

$$\lambda=2\frac{(t_1-t_2)+t_1t_2(t_2-t_1)}{1+t_2^2-t_1^2-t_1^2t_2^2-1-t_1^2+t_2^2+t_1^2t_2^2}=2\frac{(t_1-t_2)(1-t_1t_2)}{2(t_2^2-t_1^2)}=\frac{(t_2-t_1)(t_1t_2-1)}{(t_2-t_1)(t_2+t_1)}=\frac{t_1t_2-1}{t_1+t_2}\quad .$$

Par relation coefficients-racines et d'après la définition de t_1 et t_2, nous savons que :

$t_1t_2=\dfrac{-r-(d-\cos\theta)}{-r+(d-\cos\theta)}$ et que $t_1+t_2=-\dfrac{2\sin\theta}{-r+(d-\cos\theta)}$.

Ainsi : $\lambda=\dfrac{-r-(d-\cos\theta)+r-(d-\cos\theta)}{-2\sin\theta}=\dfrac{d-\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{d}{\sin\theta}-\cot\theta$.

On n'a plus qu'à prendre en compte le fait que la corde passe par un des deux points d'intersection (par exemple celui correspondant à t_1, de coordonnées $\left(d+r\dfrac{1-t_1^2}{1+t_1^2},r\dfrac{2t_1}{1+t_1^2}\right)$).

On a alors : $y=\left(\dfrac{d}{\sin\theta}-\cot\theta\right)\left(x-d-r\dfrac{1-t_1^2}{1+t_1^2}\right)+r\dfrac{2t_1}{1+t_1^2}$

d'où $\sin\theta\, y=(d-\cos\theta)(x-d)+\dfrac{r}{1+t_1^2}\left((\cos\theta-d)(1-t_1^2)+2t_1\sin\theta\right)$

ce qui donne $\sin\theta\, y=(d-\cos\theta)(x-d)+\dfrac{r}{1+t_1^2}\left((d-\cos\theta)t_1^2+(2\sin\theta)t_1+(\cos\theta-d)\right)$.

En utilisant l'équation du second degré, on obtient : $(d-\cos\theta)t^2+(2\sin\theta)t+(\cos\theta-d)=r(1+t^2)$, notre équation devient donc : $\sin\theta\, y=(d-\cos\theta)(x-d)+r^2$.

En définitive, l'équation de cette corde est donc : $\sin\theta\, y+(\cos\theta-d)x=r^2-d^2+d\cos\theta$. Le résultat vaut encore (par continuité) si les points d'intersection sont alignés verticalement.

VI. Point d'intersection

On a désormais à résoudre le système suivant : $(S)\begin{cases}\cos\theta\, x+\sin\theta\, y=1\\(\cos\theta-d)x+\sin\theta\, y=r^2-d^2+d\cos\theta\end{cases}$.

Celui-ci se résout aisément par équivalence (les hypothèses $d\neq 0$ et $\theta\neq 0[\pi]$ allant de soi pour que le problème ait un sens géométrique) :

$$(S)\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\theta\, y=1-\cos\theta\, x\\-d\,x=r^2-d^2+d\cos\theta-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\theta\, y=1-\cos\theta\, x\\x=\dfrac{1-r^2}{d}+d-\cos\theta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{1+\cos^2\theta}{\sin\theta}-\left(\dfrac{d^2-r^2+1}{d}\right)\cot\theta\\x=\dfrac{d^2-r^2+1}{d}-\cos\theta\end{cases}\quad .$$

Ainsi les coordonnées obtenues au final sont $\left(\dfrac{d^2-r^2+1}{d}-\cos\theta,\dfrac{1+\cos^2\theta}{\sin\theta}-\left(\dfrac{d^2-r^2+1}{d}\right)\cot\theta\right)$.

Lieu géométrique (quartique) : En posant $a=\dfrac{d^2-r^2+1}{d}$, on obtient que le lieu de ces points (pour $x\in]a-1,a+1[$) est: $y=\pm\dfrac{(a-x)^2-a(a-x)+1}{\sqrt{1-(a-x)^2}}$, c'est-à-dire $(1-(a-x)^2)\,y^2=(x^2-a\,x+1)^2$.

http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.409.8384&rep=rep1&type=pdf http://www.math.rutgers.edu/~zeilberg/tokhniot/fng http://users.skynet.be/cabri/cabri/jverne.htm http://www.debart.fr/pdf/lieux_geometriques.pdf (10) Un article de Tangente de 2008 (introuvable sur Internet)