Problème de magazine

25 juillet 2019

Voici l'énoncé du problème : « Esteban, né le 22 novembre est le père de cinq garçons et de quatre filles. Tous les enfants ont le même écart d'âge. En 2011, la somme des carrés des âges des enfants sera égal au carré de l'âge d'Esteban. Quel âge a Esteban ? »

1 Solutions

Notons a l'âge du plus jeune des enfants, b la différence constante entre leurs âges, et c l'âge d'Esteban, on est censé résoudre, en entiers positifs :

$$a^2 + (a+b)^2 + \ldots + (a+8b)^2 = c^2$$

Or :

$$a^2+(a+b)^2+\ldots+(a+8b)^2 = 9a^2+(2+4+6+8+10+12+14+16)ab+(1+4+9+16+25+36+49+64)b^2 = 9a^2+72ab+204b^2$$

On remarque que :

$$9a^2 + 72ab + 204b^2 = (3a+12b)^2 + 60b^2 = (3a+12b)^2 + (2\sqrt{15}b)^2$$

Quitte à poser $a' = \frac{a}{c}$, $b' = \frac{b}{c}$, on peut supposer :

$$(3a' + 12b')^2 + (2\sqrt{15}b')^2 = 1$$

On est donc amené à chercher les triplets pythagoriciens dans $\mathbb{Q}[\sqrt{15}]$.
Soit un point (α, β) du cercle unité. En notant t la tangente de son arc moitié, on sait que :

$$\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$\beta = \frac{2t}{1+t^2}$$

En particulier $t = \frac{\beta}{1+\alpha}$ et on remarque ainsi que t est dans $\mathbb{Q}[\sqrt{15}]$ si et seulement si α et β le sont tous deux.
La question est désormais : pour quelles valeurs de $t = x + \sqrt{15}y$ a-t-on $\alpha \in \mathbb{Q}$ et $\beta \in \sqrt{15}\mathbb{Q}$?

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\
&= \frac{1-(x+\sqrt{15}y)^2}{1+(x+\sqrt{15}y)^2} \\
&= \frac{1-(x+\sqrt{15}y)^2}{1+x^2+2\sqrt{15}xy+15y^2} \\
&= \frac{[1-(x+\sqrt{15}y)^2][1+x^2-2\sqrt{15}xy+15y^2]}{[1+x^2+2\sqrt{15}xy+15y^2][1+x^2-2\sqrt{15}xy+15y^2]} \\
&= \frac{[1-(x+\sqrt{15}y)^2][1+x^2-2\sqrt{15}xy+15y^2]}{[1+x^2+15y^2]^2-60x^2y^2} \\
&= \frac{[1-x^2-2\sqrt{15}xy-15y^2][1+x^2-2\sqrt{15}xy+15y^2]}{[1+x^2+15y^2]^2-60x^2y^2}
\end{aligned}$$

La partie en $\sqrt{15}$ est nulle lorsque $-2xy(1+x^2+15y^2) - 2xy(1-x^2-15y^2) = 0$, c'est-à-dire que $-4xy = 0$, donc $x = 0$ ou $y = 0$.

$$\begin{aligned}
\beta &= \frac{2t}{1+t^2} \\
&= \frac{2(x+\sqrt{15}y)}{1+(x+\sqrt{15}y)^2} \\
&= \frac{2(x+\sqrt{15}y)}{1+x^2+2\sqrt{15}xy+15y^2} \\
&= \frac{[2(x+\sqrt{15}y)][1+x^2-2\sqrt{15}xy+15y^2]}{[1+x^2+2\sqrt{15}xy+15y^2][1+x^2-2\sqrt{15}xy+15y^2]} \\
&= \frac{[2(x+\sqrt{15}y)][1+x^2-2\sqrt{15}xy+15y^2]}{[1+x^2+15y^2]^2-60x^2y^2}
\end{aligned}$$

La partie réelle est nulle lorsque $x(1+x^2+15y^2) - 30xy^2 = 0$. Si $x = 0$, cela n'apporte aucune condition supplémentaire. Si $y = 0$, cela implique que $x(1+x^2) = 0$ et donc $x = 0$. Ainsi, x est nul dans tous les cas, et la condition $x = 0$ résume toutes les autres.

Les triplets pythagoriciens qui nous intéressent sont donc paramétrés par $y \in \mathbb{Q}$, et calculés par :

$$3a' + 12b' = \alpha = \frac{1-15y^2}{1+15y^2}$$

$$2\sqrt{15}b' = \beta = \frac{2\sqrt{15}y}{1+15y^2}$$

On a donc :

$$b' = \frac{y}{1+15y^2}$$

$$a' = \frac{1}{3}\left(\frac{1-15y^2}{1+15y^2} - 12\frac{y}{1+15y^2}\right) = \frac{-15y^2-12y+1}{3(1+15y^2)}$$

Par ailleurs on veut a', b' positifs, donc il faut d'une part que y soit choisi positif, et d'autre part que $15y^2 + 12y < 1$, ce qui contraint y à être plus petit qu'environ 0.0761 (et donc, sauf à avoir y nul, il faut un dénominateur plus grand que 14).

Voyons ce qu'on obtient pour $y = 1/14$:

$$b' = 14/211$$

$$a' = 13/633$$

Ce qui donne le triplet :

$$(a, b, c) = (13, 42, 633)$$

On vérifie en effet que :

$$13^2 + 55^2 + 97^2 + 139^2 + 181^2 + 223^2 + 265^2 + 307^2 + 349^2 = 400689$$

$$633^2 = 400689$$

Cette méthode parcourt toutes les « classes de proportionnalité » des solutions au problème, chacune une et une seule fois. Pour $y = 0$, on a le triplet « trivial » $(1, 0, 3)$.

2 Calcul avec entiers uniquement

Écrivons maintenant $y = \frac{p}{q}$ avec p, q entiers premiers entre eux. Alors on peut calculer :

$$b' = \frac{y}{1+15y^2} = \frac{p}{q(1+15\frac{p^2}{q^2})} = \frac{pq}{q^2+15p^2}$$

$$a' = \frac{-15y^2-12y+1}{3(1+15y^2)} = \frac{-15\frac{p^2}{q^2}-12\frac{p}{q}+1}{3(1+15\frac{p^2}{q^2})} = \frac{-15p^2-12pq+q^2}{3(q^2+15p^2)}$$

On obtient donc le triplet :

$$(-15p^2-12pq+q^2, 3pq, 3(q^2+15p^2))$$

Soit un nombre premier π. Supposons que π divise chaque élément du triplet.

— Supposons $\pi \neq 3$. Alors $\pi \mid pq$. Donc soit π est un diviseur de p, soit c'est un diviseur de q. Si $\pi \mid p$, puisqu'on a $\pi \mid q^2+15p^2$, on a aussi $\pi \mid q^2$ et donc $\pi \mid q$, ce qui contredit que p et q soient premiers entre eux. Donc π divise q. Et alors $\pi \mid 15p^2$ et donc $\pi \mid 5p^2$.

  — Si $\pi \neq 5$, on en déduit que $\pi \mid p^2$ et donc $pi \mid p$, ce qui contredit que p et q soient premiers entre eux.

  — Si $\pi = 5$, en écrivant $q = 5q'$, alors on se ramène au triplet

$$(-3p^2-12pq'+5q'^2, 3pq', 3(5q'^2+3p^2))$$

  dont on peut étudier les facteurs communs (forcément 3, car si 5 divise ce nouveau triplet, il divise $3p^2$ et donc p et donc p et q n'étaient pas premiers entre eux au départ) par les mêmes méthodes.

— Si $\pi = 3$, alors $3 \mid q^2$ donc $3 \mid q$. Alors on se ramène au triplet

$$(-5p^2-12pq'+3q'^2, 3pq', 3(3q'^2+5p^2))$$

dont on peut étudier les facteurs communs (forcément 5, car si 3 divise ce nouveau triplet, il divise $5p^2$ et donc p et donc p et q n'étaient pas premiers entre eux au départ) par les mêmes méthodes.

De cette analyse, on déduit aisément la chose suivante : les seuls facteurs communs potentiels du triplet $(-15p^2-12pq+q^2, 3pq, 3(q^2+15p^2))$ sont 3 et 5, et ils divisent au plus une fois le triplet, chacun étant un facteur du triplet exactement lorsqu'il divisent q.

Voici donc la forme exacte des triplets primitifs pour un couple (p, q) d'entiers positifs premiers entre eux arbitraires. Cette classification énumère toutes les solutions primitives une et une seule fois :

— Si q est premier avec 15 :

$$(-15p^2-12pq+q^2, 3pq, 3(q^2+15p^2))$$

— Si q est un multiple de 3 mais pas de 5 ($q = 3q'$) :

$$(-5p^2-12pq'+3q'^2, 3pq', 3(3q'^2+5p^2))$$

— Si q est un multiple de 5 mais pas de 3 ($q = 5q'$) :

$$(-3p^2-12pq'+5q'^2, 3pq', 3(5q'^2+3p^2))$$

— Si q est un multiple de 15 ($q = 15q'$) :

$$(-p^2-12pq'+15q'^2, 3pq', 3(15q'^2+p^2))$$

3 Solutions réalistes

On s'intéresse aux solutions réalistes, c'est-à-dire celles pour lesquelles l'âge d'Esteban est inférieur à 100.

— Dans le cas où ni 3, ni 5 ne divise q, l'âge (minimal) d'Esteban est $3(q^2+15p^2)$. Si $p \geq 2$, cet âge est excessif, et donc $p = 1$. On voit alors qu'il faut de plus de $q \leq 4$. Puisqu'on a établi qu'un dénominateur plus petit que 14 ne pouvait pas donner un résultat positif, ce cas ne donnera pas de solutions réalistes.

— Dans le cas où q est un multiple de 3 mais pas de 5, l'âge (minimal) d'Esteban est q^2+15p^2. Ici, $p = 1$ ou $p = 2$. Dans tous les cas, il faut $q \leq 9$, ce qui empêche d'avoir des résultats positifs.

— Dans le cas où q est un multiple de 5 mais pas de 3, l'âge (minimal) d'Esteban est $3(5q'^2+3p^2)$, donc il faut $5q'^2+3p^2 \leq 33$. Ici, $q' = 1$ ou $q' = 2$, donc $q \leq 10$, ce qui empêche d'avoir des résultats positifs.

— Il faut donc que q soit multiple de 15, et que $3(15q'^2+p^2) \leq 100$ donc $15q'^2+p^2 \leq 33$, donc $q' = 1$, et $p \leq 4$. Cela donne quatre solutions potentielles pour (p, q) : $(1, 15), (2, 15), (3, 15), (4, 15)$. Seul $1/15$ est assez petit pour que a soit positif.

Ainsi la seule solution réaliste est $(p, q) = (1, 15)$, qui donne le triplet $(2, 3, 48)$.

Donc le père a 48 ans, et ses enfants $2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26$ ans.