Condition suffisante pour qu'un sous-monoïde soit finiment engendré

Énoncé.

Soit M un monoïde positivement gradué et finiment engendré, $M' \subseteq M$ un sous-monoïde gradué et $N \in \mathbb{N}$ un entier. On suppose que :

1. pour tous $m, m' \in M$, il existe $m'' \in M$ tel que $mm' = m''m$;
2. Si $m \in M$ et $m' \in M'$ sont tels que $mm' \in M'$, alors $m \in M'$;
3. pour tout $m \in M$, il existe $k \in \{1, ..., N\}$ tel que $m^k \in M'$.

Alors, M' est finiment engendré.

Démonstration.

Fixons des générateurs $g_1, ..., g_n$ de M, et soit $\delta := \max_i \deg g_i$.

Soit S l'ensemble des éléments de M' de degré $\leq \delta n(N+1)$, qui est fini. On va montrer que les éléments de S engendrent M'. Pour cela, on raisonne par récurrence sur le degré d'un élément $x \in M'$. Si $\deg x \leq \delta n(N+1)$, alors $x \in S$ et le résultat est clair. On considère donc un $x \in M'$ tel que $\deg x > \delta n(N+1)$, et on suppose que les éléments de M' de degré $\leq \deg x$ appartiennent au sous-monoïde engendré par S.

Dans M, on peut décomposer x sous la forme $g_{i(1)} g_{i(2)} \cdots g_{i(r)}$. Puisque $\deg x > \delta n(N+1)$, il existe $i_0 \in \{1, ..., n\}$ tel que $i(k) = i_0$ pour au moins $N+1$ valeurs de $k \in \{1, ..., r\}$. Par 1, on peut déplacer les $N+1$ copies de g_{i_0} vers la droite, et obtenir:

$$x = x' g_{i_0}^{N+1}$$

pour un certain x'. Par 3, il existe $k \in \{1, ..., N\}$ tel que $g_{i_0}^k \in M'$, et alors:

$$\underbrace{x}_{\in M'} = x' g_{i_0}^{N+1-k} \underbrace{g_{i_0}^k}_{\in M'}$$

Par 2, on a alors $x' g_{i_0}^{N+1-k} \in M'$. De plus, $0 < \deg\left(x' g_{i_0}^{N+1-k}\right) < \deg x$. Par hypothèse de récurrence, $x' g_{i_0}^{N+1-k}$ et $g_{i_0}^k$ appartiennent alors au sous-monoïde engendré par S, et il en va alors de même de x. ∎