$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{GL}_n(R) \arrow[d, two heads] \\
\mathrm{Hom}(\mathfrak{R}_{\overline{\rho}}, R) \arrow[to=Z, squiggly, bend left] & G \arrow[ur, dashed, ""{name=Z}] \arrow[r, "\overline{\rho}"'] & \mathrm{GL}_n(k)
\end{tikzcd}
$$

Les Déformations des Représentations Galoisiennes

Béranger Seguin

Mémoire de master, soutenu le 24 septembre 2019 à Paris.

Encadrant	Xavier Caruso	Institut Mathématique de Bordeaux
Rapportrice	Ariane Mézard	ENS Ulm

Version révisée en 2024

Table des matières

1 Introduction **3**

2 Les représentations galoisiennes et leurs déformations **5**

2.1 Préliminaires . . . 5

2.2 Représentations galoisiennes . . . 8

2.3 Le foncteur des déformations . . . 10

3 Le critère de Schlessinger **13**

3.1 Espaces tangents et nombres duaux . . . 14

3.2 Énoncé du critère de Schlessinger . . . 17

3.3 Démonstration du critère de Schlessinger . . . 21

4 Anneaux de déformations **29**

4.1 Existence d'un anneau de déformation . . . 29

4.2 Déformations des représentations unidimensionnelles . . . 35

4.3 Description des anneaux de déformations . . . 36

4.4 Changement de groupe . . . 42

5 Zoologie des représentations galoisiennes **43**

5.1 Types de déformations et anneaux de déformation associés . . . 44

5.2 Premiers exemples de types de déformation . . . 45

5.3 Anneaux de périodes . . . 47

5.4 Représentations issues de la géométrie . . . 51

5.5 Un mot sur le dernier théorème de Fermat . . . 54

6 Conclusion **57**

Bibliographie **58**

Chapitre 1

Introduction

Le groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}$ occupe une place centrale dans la théorie des nombres moderne. Ses propriétés reflètent des faits profonds sur les corps de nombres, les équations diophantiennes, etc. En revanche, ce groupe est notoirement compliqué à décrire. Afin de ramener son étude à celle d'objets plus simples, on étudie « l'ombre » qu'il laisse en divers endroits. Ainsi, on s'intéresse aux groupes de Galois absolus des complétions de $\mathbb{Q}$ et de leurs extensions, ainsi qu'aux représentations de ces groupes, les *représentations galoisiennes*. Ces représentations apparaissent naturellement lors de l'étude de la géométrie de variétés algébriques : leur classification est un moyen de mettre en lumière des phénomènes à l'interface entre arithmétique et géométrie. La théorie des déformations des représentations galoisiennes, à laquelle ce mémoire se veut être une introduction, construit des objets classifiant les relèvements (ou « déformations ») d'une représentation galoisienne donnée : ce sont les *anneaux de déformation*. L'existence de ces espaces de modules permet de mettre à profit des méthodes géométriques pour étudier les représentations galoisiennes et donc, ultimement, les corps de nombres et les équations diophantiennes. Cette approche a joué un rôle central dans la preuve par Wiles du dernier théorème de Fermat.

L'objectif de ce mémoire est de faire un tour d'horizon de la théorie des déformations des représentations galoisiennes, en insistant notamment sur la construction des anneaux de déformation. Certains énoncés sont démontrés complètement, tandis que d'autres sont simplement évoqués, accompagnés de renvois vers des références. Tout au long du mémoire, on s'efforce de motiver les définitions, de donner des exemples des objets étudiés, et de présenter des cas d'applications des théorèmes démontrés.

Les principales références sont le cours *Deformations of Galois Representations* [Gou91] de Gouvêa pour les généralités, et l'ouvrage *An Introduction to the Theory of p-adic Representations* [Ber04] de Laurent Berger pour les détails relatifs à la théorie de Hodge p-adique.

Organisation du texte. Dans le chapitre 2, on définit les objets qui nous intéressent, et en particulier les représentations galoisiennes et le foncteur des déformations associé à une représentation galoisienne résiduelle.

Le chapitre 3 est consacré à l'énoncé et à la démonstration du critère de Schlessinger, un théorème d'algèbre commutative qui permet d'établir la représentabilité de certains foncteurs.

Dans le chapitre 4, on applique le critère de Schlessinger au foncteur des déformations afin de démontrer l'existence des anneaux de déformation des représentations galoisiennes. On donne ensuite des éléments de description de ces anneaux de déformation, en reliant leurs invariants géométriques à la dimension de groupes de cohomologie galoisienne.

Enfin, le chapitre 5 est consacré à la classification des représentations galoisiennes, comme première incursion dans le monde de la théorie de Hodge p-adique. On évoque les liens entre cette typologie et la question de la provenance géométrique des représentations. On conclut la section par un aperçu de la structure de la démonstration du dernier théorème de Fermat par Andrew Wiles, en identifiant notamment le rôle de la théorie des déformations dans son travail.

Notations. Dans l'intégralité du texte, on fixe un nombre premier p et un corps k parfait de caractéristique p. Le cas $k = \mathbb{F}_p$ est vu comme la situation typique. On introduit un second corps K, d'un des deux types suivant :

— **Cas local :** K est un corps ℓ-adique, c'est-à-dire une extension finie de $\mathbb{Q}_\ell$ pour un nombre premier ℓ, égal ou non à p. On a $\overline{K} = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$, et $\mathbb{C}_K = \mathbb{C}_\ell$ est la complétion ℓ-adique de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. On note $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers de K, formé des éléments dont la valuation est positive pour l'unique extension de la valuation ℓ-adique à K. Pour des rappels concernant ces objets, on peut consulter [Ser62].

Dans cette situation, on note $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}|K)$ le groupe de Galois absolu de K, muni de sa topologie profinie (héritée des topologies discrètes sur les groupes de Galois des extensions finies), c'est-à-dire :

$$G_K = \varprojlim_{K'|K \text{ extension finie}} \mathrm{Gal}(K'|K).$$

Si, dans ce texte, on ne distingue que très rarement les deux situations $\ell = p$ et $\ell \neq p$, elles donnent en fait lieu à des théories des représentations galoisiennes assez différentes.

— **Cas global :** K est un corps de nombres, c'est-à-dire une extension finie de $\mathbb{Q}$. On a $\overline{K} = \overline{\mathbb{Q}}$ et $\mathbb{C}_K = \mathbb{C}$. Dans ce cas, on note $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers de K, formé des éléments qui sont racines d'un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Une place de $\mathcal{O}_K$ est une classe d'équivalence de valeurs absolues. Si S est un ensemble fini de places de $\mathcal{O}_K$, on définit :

$$G_{K,S} = \varprojlim_{\substack{K'|K \text{ extension finie} \\ \text{non ramifiée hors de } S}} \mathrm{Gal}(K'|K)$$

où l'extension $K'|K$ est dite *non ramifiée* en une place dans les conditions suivantes :

- **cas d'une place non-archimédienne, qui correspond à un idéal premier p de $\mathcal{O}_K$:** l'extension $K'|K$ est non ramifiée lorsque l'idéal $p\mathcal{O}_{K'}$ de $\mathcal{O}_{K'}$ est produit d'idéaux premiers distincts de $\mathcal{O}_{K'}$ (c'est-à-dire qu'aucune puissance n'est supérieure ou égale à 2 dans sa décomposition) ;
- **cas d'une place archimédienne, qui correspond[1] à un plongement de K dans $\mathbb{C}$:** l'extension $K'|K$ est non ramifiée si le plongement $K \to \mathbb{C}$ n'est pas d'image réelle ou, dans le cas contraire, si tout plongement de K' dans $\mathbb{C}$ qui étend ce plongement est aussi d'image réelle.

Les groupes G_K et $G_{K,S}$ sont des groupes profinis. Ce sont leurs représentations continues qu'on étudie dans ce texte.

1. On retrouve la valeur absolue associée comme restriction de la norme complexe.

Chapitre 2

Les représentations galoisiennes et leurs déformations

Dans ce chapitre, on définit les représentations galoisiennes et leurs déformations. Ces objets sont centraux dans le reste du mémoire.

2.1 Préliminaires

2.1.1 La condition de finitude Φ_p

Définition 2.1. Un groupe profini G *vérifie la condition* Φ_p lorsque, pour tout sous-groupe ouvert G_0 de G, l'ensemble des morphismes continus $G_0 \to \mathbb{F}_p$ est fini.

Le lien entre cette condition de finitude et la situation galoisienne est explicité par la proposition suivante :

Proposition 2.2. *La condition Φ_p est satisfaite dans les deux cas suivants :*

1. *Si K est un corps ℓ-adique, alors le groupe G_K satisfait la condition Φ_p ;*
2. *Si K est un corps de nombres et si S est un ensemble fini de places de $\mathcal{O}_K$, alors le groupe $G_{K,S}$ satisfait la condition Φ_p.*

La proposition 2.2 résulte du théorème de Hermite–Minkowski, qui entraîne la finitude du nombre d'extensions de degré fixé (non ramifiées hors de S, dans le cas global). On peut aussi la déduire de la description explicite des groupes $G_{K(,S)}^{\mathrm{ab}}$ donnée par la théorie du corps de classes.

En raison de la proposition 2.2, on fera régulièrement jouer le rôle des groupes de Galois absolus G_K ou $G_{K,S}$ par un groupe profini « abstrait » G, vérifiant la condition Φ_p. Il faut garder en tête que les énoncés concernant de tels groupes profinis sont « taillés sur mesure » pour être appliqués dans le cas des groupes de Galois.

Remarque 2.3. Dans le cas local, et lorsque K contient les racines p-ièmes de l'unité, on peut démontrer la proposition 2.2 rapidement via la théorie de Kummer. On a la suite exacte :

$$0 \to \mu_p \to \overline{K}^\times \xrightarrow{x \mapsto x^p} \overline{K}^\times \to 0$$

dont on déduit la suite exacte longue suivante, en cohomologie galoisienne (la notation $H^i(K, M)$

signifie $H^i(\mathrm{Gal}(\overline{K}|K), M))$:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
0 \to & H^0(K,\mu_p) & \to & H^0(K,\overline{K}^\times) & \to & H^0(K,\overline{K}^\times) & \longrightarrow & H^1(K,\mu_p) & \longrightarrow & H^1(K,\overline{K}^\times) & \to \dots \\
\| & \| & & \| & & \| & & \| & & \| & \\
0 \longrightarrow & \mu_p & \longrightarrow & K^\times & \xrightarrow{x\mapsto x^p} & K^\times & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(G_K,\mathbb{F}_p) & \longrightarrow & 0 &
\end{array}
$$

L'égalité dans la dernière colonne provient du théorème 90 de Hilbert. Ainsi, l'ensemble des morphismes $G_K \to \mathbb{F}_p$ est en bijection avec l'ensemble $K^\times/(K^\times)^p$, qui a une structure naturelle de $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension finie. On a montré la finitude de $\mathrm{Hom}(G_K, \mathbb{F}_p)$.

2.1.2 Vecteurs de Witt

L'anneau des vecteurs de Witt généralise la construction de $\mathbb{Z}_p$ à partir de $\mathbb{F}_p$. Dans cette sous-section, on rappelle brièvement certaines propriétés de cette construction. Pour une référence, on peut lire [Ber04].

Théorème 2.4. *Soit R un corps parfait de caractéristique p. Il existe un anneau $W(R)$, unique à isomorphisme près, satisfaisant les propriétés suivantes ;*

— *$W(R)$ est un anneau de valuation discrète de caractéristique nulle ;*

— *Le corps résiduel de $W(R)$ est isomorphe à R ;*

— *$W(R)$ est séparé et complet pour la topologie p-adique.*

On dit que $W(R)$ est l'*anneau des vecteurs de Witt* de R. Cette construction définit un foncteur W de la catégorie des corps parfaits de caractéristique p dans la catégorie des anneaux locaux complets pour la topologie p-adique. Par fonctorialité, l'endomorphisme de Frobenius $\mathrm{Frob} : x \mapsto x^p$ sur R (surjectif) induit un automorphisme de $W(R)$.

Représentants de Teichmüller. Soit x un élément de R. On choisit une famille x_n d'éléments de $W(R)$ telle que l'image de x_n dans le corps résiduel R soit la racine p^n-ième $\mathrm{Frob}^{-n}(x)$ de x, qui existe puisque R est supposé parfait. On définit alors l'élément suivant de $W(R)$:

$$[x] = \lim_{n\in\mathbb{N}} (x_n)^{p^n}.$$

La limite qui définit $[x]$ existe car la suite $(x_n)^{p^n}$ est de Cauchy, et sa limite ne dépend pas des éléments x_n choisis.

Définition 2.5. L'élément $[x] \in W(R)$ est le *représentant de Teichmüller* de x.

Le représentant de Teichmüller est un représentant de x, au sens où son image dans R est x. De plus, l'application $x \mapsto [x]$ est multiplicative (mais pas additive !). Enfin, tout élément de $W(R)$ s'écrit de manière unique sous la forme suivante, où les x_n sont des éléments de R :

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} p^n [x_n].$$

2.1.3 Anneaux de coefficients

2.1.3.1. Définitions.

Définition 2.6. Un *anneau de coefficients* est un anneau A qui est à la fois :

— nœthérien : toute suite croissante d'idéaux de A stationne ;

— local : A admet un unique idéal maximal $\mathfrak{m}_A$, qui donne lieu à la valuation :

$$v_A(x) = \max\{i \mid x \in \mathfrak{m}_A^i\} \ ;$$

— complet : on a l'égalité :

$$A = \varprojlim_n A/\mathfrak{m}_A^n$$

ou, de manière équivalente : toute suite (u_n) qui est de Cauchy[1] est convergente, pour la topologie induite par la valuation v_A ;

— de corps résiduel k :

$$A/\mathfrak{m}_A = k.$$

Un morphisme d'anneaux locaux $A \to B$ est un morphisme d'anneaux tel que l'image de $\mathfrak{m}_A$ soit incluse dans $\mathfrak{m}_B$. On note $\mathcal{C}$ la catégorie des anneaux de coefficients, dont les morphismes sont les morphismes continus d'anneaux locaux qui induisent l'identité sur le corps résiduel k. On note $\mathcal{C}^0$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ dont les objets sont les anneaux de coefficients *artiniens*, c'est-à-dire ceux dans lesquels toute suite décroissante d'idéaux stationne. Par complétude, tout anneau de coefficients $A \in \mathcal{C}$ est limite projective d'anneaux de coefficients artiniens, à savoir ses quotients $A/\mathfrak{m}_A^n \in \mathcal{C}^0$.

2.1.3.2. Structure des anneaux de coefficients. Soit un anneau de coefficients $A \in \mathcal{C}$. Par la propriété universelle de l'anneau des vecteurs de Witt, l'anneau A est muni d'une structure naturelle de $W(k)$-algèbre. Puisque A est un anneau local nœthérien, on peut écrire son idéal maximal sous la forme $\mathfrak{m} = (q_1, \dots, q_d)$, pour un certain entier d et des éléments $q_1, \dots, q_d \in A$.

Soit un élément arbitraire $x \in A$, et soit $[\overline{x}] \in W(k)$ le représentant de Teichmüller de la projection de x dans le corps résiduel k. Alors, $m = x - [\overline{x}]$ a une projection nulle dans k et appartient donc à l'idéal maximal $\mathfrak{m}$. On peut alors décomposer m comme une somme :

$$m = \sum_{i=1}^{d} m_i q_i.$$

Soit $\widetilde{m}$ l'élément de $\mathfrak{m}$ obtenu en remplaçant dans cette somme chaque coefficient m_i par le représentant de Teichmüller $[\overline{m_i}]$ de sa projection modulo p. On poursuit le procédé d'approximation en considérant, pour chaque coefficient m_i, sa différence avec $[\overline{m_i}]$, qui appartient à $\mathfrak{m}$, puis en substituant chaque coefficient de sa décomposition par le représentant de Teichmüller de sa projection modulo $\mathfrak{m}$, et ainsi de suite. Cela donne une suite d'approximations successives de x, appartenant à $W(k)[q_1, \dots, q_d]$:

$$\begin{aligned} x_1 &= [\overline{x}] \\ x_2 &= [\overline{x}] + \widetilde{m} \\ x_3 &= [\overline{x}] + \widetilde{m} + \sum_{i=1}^{d} \widetilde{m_i} q_i \\ &\vdots \end{aligned}$$

1. C'est-à-dire vérifiant $\forall K, \exists n_0, \forall n, m \geq n_0, v_A(u_n - u_m) \geq K$.

La différence entre le i-ème terme x_i de cette suite et x appartient à $\mathfrak{m}^i$. Autrement dit, dans la complétion $W(k)[\![q_1,\dots,q_d]\!]$, cette suite converge vers x. Ainsi, le morphisme $W(k)[q_1,\dots,q_d] \to A$ est d'image dense et induit une surjection $W(k)[\![q_1,\dots,q_d]\!] \twoheadrightarrow A$. Par composition, on obtient une surjection

$$W(k)[\![X_1,\dots,X_d]\!] \xrightarrow{X_i \mapsto q_i} W(k)[\![q_1,\dots,q_d]\!] \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow A$$

dont le noyau est un idéal I de $W(k)[\![X_1,\dots,X_d]\!]$. Cela donne la suite exacte :

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow W(k)[\![X_1,\dots,X_d]\!] \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

Ainsi, la description d'un anneau de coefficients A consiste en la donnée de l'entier d et de l'idéal I de $W(k)[\![X_1,\dots,X_d]\!]$ (nécessairement finiment engendré). On a alors :

$$A \simeq W(k)[\![X_1,\dots,X_d]\!]/I.$$

2.2 Représentations galoisiennes

2.2.1 Définition

Le groupe de Galois absolu d'un corps K agit, par construction, sur le corps $\overline{K}$, et par conséquent sur tout objet construit à partir de $\overline{K}$ de manière fonctorielle. En particulier, dans le cas de modules libres ou d'espaces vectoriels de dimension finie (typiquement, la cohomologie d'une variété sur $\overline{K}$), cette action donne lieu à une *représentation galoisienne* :

Définition 2.7. Une *représentation galoisienne* d'une extension de corps $L|K$, sur un anneau topologique A, est un morphisme continu de groupes $\rho\ : \mathrm{Gal}(L|K) \to \mathrm{GL}_n(A)$.

En général, on choisit pour L la clôture séparable de K, ou alors l'extension séparable maximale non-ramifiée en dehors d'un ensemble fini S de places. L'étude des représentations galoisiennes est motivée par leur intervention naturelle dans de nombreuses situations arithmétiques et/ou géométriques.

2.2.2 Représentations (absolument) irréductibles

Définition 2.8. Soit G un groupe et V un k-espace vectoriel. Une représentation $G \to \mathrm{Aut}(V)$ est *irréductible* lorsque V n'a pas de sous-espaces G-invariants autres que V et 0. Elle est *absolument irréductible* lorsque la représentation $G \to \mathrm{Aut}(V \otimes_k \overline{k})$, correspondant à l'action de G sur $V \otimes_k \overline{k}$ induite par la formule $g.(x \otimes y) = (g.x) \otimes y$, est irréductible.

Le fait qu'une représentation V soit absolument irréductible équivaut à ce qu'elle reste irréductible dans toute extension finie de k. On donne à présent un exemple de représentation irréductible mais non absolument irréductible :

Exemple 2.9. Soit le morphisme $\rho\ : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ défini par :

$$\rho(0) = I_2 \qquad \rho(1) = J\ := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \rho(2) = -I_2 \qquad \rho(3) = -J.$$

Un sous-espace non-trivial de $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ ne peut être qu'une droite. La droite de générateur $(a,b) \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \setminus \{(0,0)\}$ est stabilisée par J (et donc par toute l'action) si et seulement s'il existe

$\lambda \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ tel que $\lambda a = b$ et $\lambda b = -a$, soit $a = -\lambda^2 a$. Si $a = 0$, alors $b = 0$ et ce n'est pas une droite ; sinon $\lambda^2 = -1$. Mais -1 n'est pas un carré dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Donc la représentation ρ est irréductible. En revanche, dans $\overline{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}$, J a des valeurs propres (les racines carrées de -1), et par conséquent il existe des droites de $(\overline{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}})^2$ stabilisées par l'action de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. La représentation ρ n'est donc pas absolument irréductible.

$$\chi : G_K \mapsto \mathbb{Z}_p^\times$$

FIGURE 2.1 – Attention à ne pas confondre : à gauche, une représentation d'un groupe de gaulois irréductibles ; à droite, une représentation irréductible d'un groupe de Galois.

2.2.3 Une première source de représentations : les courbes elliptiques

Soit une courbe elliptique E sur un corps de nombres K. Les points de p-torsion de E dans $\overline{K}$ forment un groupe isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ (voir [Dat18, p. 38]), sur lequel $\mathrm{Gal}(\overline{K}|K)$ agit naturellement (coordonnée par coordonnée sur les points). Cette action donne lieu à une représentation galoisienne, dite *résiduelle* :

$$\overline{\rho}\ : \mathrm{Gal}(\overline{K}|K) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p).$$

De même, lorsque n varie, la famille des ensembles de points de p^n-torsion de la courbe elliptique forme une suite de groupes isomorphes à $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^2$, munis d'actions compatibles de $\mathrm{Gal}(\overline{K}|K)$. Par passage à la limite projective, on obtient une action de $\mathrm{Gal}(\overline{K}|K)$ sur le $\mathbb{Z}_p$-module $\mathbb{Z}_p^2$, c'est-à-dire une représentation galoisienne :

$$\rho\ : \mathrm{Gal}(\overline{K}|K) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p).$$

Par construction, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p) \arrow[d] \\
\mathrm{Gal}(\overline{K}|K) \arrow[ur, "\rho"] \arrow[r, "\overline{\rho}"] & \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)
\end{tikzcd}$$

On dira plus tard que la représentation galoisienne ρ est (un représentant d')une déformation de la représentation galoisienne « résiduelle » $\overline{\rho}$.

Dans ce mémoire, on considère les représentations de dimension quelconque car cela ne complexifie pas les énoncés et les démonstrations des faits très généraux qu'on énonce. Cependant, lorsqu'il s'agit d'étudier plus précisément des représentations galoisiennes provenant de problèmes de théorie des nombres (typiquement, en lien avec les courbes elliptiques), la plupart des applications concernent le cas $n = 2$, $k = \mathbb{F}_p$, qui est déjà riche en difficultés et en applications.

Remarque 2.10. Dans ce mémoire, on fixera systématiquement une représentation résiduelle $\overline{\rho}$: $G \to \mathrm{GL}_n(k)$, puis on paramétrera les représentations qui la « relèvent ». Il peut être utile de savoir qu'il existe aussi une description des représentations résiduelles (ou « modulo p »), donnée par la théorie des *ϕ-modules étales* (et d'autres théories liées telles que celle des (ϕ,Γ)-modules). Par exemple, si K est un corps de caractéristique p, alors l'ensemble des classes de conjugaison de représentations $G_K \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ est en bijection avec l'ensemble des orbites de matrices $M \in \mathfrak{M}_n(K)$ pour l'action de $\mathrm{GL}_n(K)$ suivante : si $G \in \mathrm{GL}_n(K)$ et G^φ est la matrice obtenue en élevant tous les coefficients de G à la puissance p, alors G agit sur une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(K)$ en l'envoyant sur $G^\varphi M G^{-1}$. En caractéristique mixte, la théorie est plus compliquée mais existe également. Pour plus de détails, on peut consulter [FO08, Chapitres 2 et 4].

2.3 Le foncteur des déformations

Dans cette sous-section, on définit les déformations d'une représentation galoisienne résiduelle ainsi que le foncteur des déformations associé. On rappelle que k est un corps de caractéristique p.

2.3.1 Déformations

Soit G un groupe profini satisfaisant la condition Φ_p (dans l'idée, un groupe de Galois absolu, voir la proposition 2.2). On fixe une représentation $\overline{\rho} : G \to \mathrm{GL}_n(k)$, qu'on appelle *représentation résiduelle*, et un anneau de coefficients A de corps résiduel k. On s'intéresse aux représentations $\rho\ : G \to \mathrm{GL}_n(A)$ qui font commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{GL}_n(A) \arrow[d] \\ G \arrow[ur, "\rho"] \arrow[r, "\overline{\rho}"] & \mathrm{GL}_n(k) \end{tikzcd}$$

Ici, le morphisme $\mathrm{GL}_n(A) \to \mathrm{GL}_n(k)$ est induit par la réduction de chaque coefficient modulo l'idéal maximal $\mathfrak{m}_A$. Le noyau de ce morphisme est noté $\Gamma_n(A)$: il s'agit de l'ensemble des matrices de $\mathrm{GL}_n(A)$ de la forme $I_n + M$, où M est à coefficients dans $\mathfrak{m}_A$.

Définition 2.11. Deux représentations $\rho_1, \rho_2\ : G \to \mathrm{GL}_n(A)$ sont *strictement équivalentes* si elles sont conjuguées par une matrice de $\Gamma_n(A)$.

Deux représentations strictement équivalentes induisent la même représentation résiduelle ; autrement dit, l'action de $\Gamma_n(A)$ sur les représentations $G \to \mathrm{GL}_n(A)$ se restreint en une action sur les représentations qui font commuter le diagramme ci-dessus. On identifiera alors deux relèvements $G \to \mathrm{GL}_n(A)$ d'une même représentation résiduelle $\overline{\rho}$ qui sont strictement équivalents :

Définition 2.12. Les *déformations* de la représentation résiduelle $\overline{\rho}$ à A sont les classes d'équivalence stricte des représentations $\rho\ : G \to \mathrm{GL}_n(A)$ qui induisent $\overline{\rho}$ par projection sur $\mathrm{GL}_n(k)$, c'est-à-dire qu'elles font commuter le diagramme ci-dessus.

Lorsque $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(A)$ est une représentation, on désignera par $[\rho]$ sa classe d'équivalence stricte. On définit maintenant l'objet principal de ce mémoire : il s'agit du foncteur des déformations introduit par Mazur.

Définition 2.13. Le *foncteur des déformations* est le foncteur $D_{\overline{\rho}}\ : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ qui associe à un anneau de coefficients A l'ensemble des déformations de $\overline{\rho}$ à A.

Lorsque le contexte ne laisse aucune ambiguïté sur la représentation résiduelle $\overline{\rho}$ en question, on note simplement $D = D_{\overline{\rho}}$.

Le thème central de ce mémoire est celui de la *représentabilité* du foncteur des déformations, et dans les cas où un représentant existe, la description des anneaux de déformation ainsi obtenus. L'intégralité du chapitre 4 (et du chapitre 3 dont les démonstrations dépendent) est dévoué à cette question.

Pourquoi se concentrer sur les anneaux de coefficients ? Il y a plusieurs raisons pour lesquelles on ne considère, parmi les représentations galoisiennes, que celles sur les anneaux de coefficients. Au-delà du fait que les situations de $\mathbb{F}_p$ et $\mathbb{Z}_p$ soient naturelles, la catégorie $\mathcal{C}$ des anneaux de déformations jouit de propriétés agréables qui rendent possible l'étude du foncteur des déformations. Il y a notamment une théorie puissante des foncteurs sur la catégorie $\mathcal{C}$ — dont un exemple frappant est le critère de Schlessinger démontré dans le chapitre 3. Par ailleurs, les anneaux de coefficients ont la particularité d'être, sous plusieurs aspects, analogue à des objets géométriques — on verra en effet qu'on peut leur attribuer une dimension, un espace tangent, etc. Ainsi, un représentant du foncteur des déformations dans la catégorie $\mathcal{C}$ a tout d'un espace de modules : il permet de porter un regard différent sur les déformations d'une représentation galoisienne, et d'employer des outils géométriques (typiquement, cohomologiques) afin de démontrer des faits non-triviaux sur les représentations galoisiennes.

2.3.2 Continuité du foncteur des déformations

On démontre à présent une propriété essentielle du foncteur des déformations :

Proposition 2.14. *Le foncteur D est continu, c'est-à-dire que pour tout $A \in \mathcal{C}$ l'application $D(A) \to \varprojlim_k D(A/\mathfrak{m}_A^k)$ est une bijection.*

Démonstration. On a $A \simeq \varprojlim_k A/\mathfrak{m}_A^k$. On a également les isomorphismes de groupes :

$$\mathrm{GL}_n(A) \simeq \varprojlim_k \mathrm{GL}_n(A/\mathfrak{m}_A^k) \qquad \text{et} \qquad \Gamma_n(A) \simeq \varprojlim_k \Gamma_n(A/\mathfrak{m}_A^k).$$

— **Surjectivité.** Soit un élément de $\varprojlim_k D(A/\mathfrak{m}_A^k)$, c'est-à-dire une suite compatible de déformations $[\rho_k] \in D(A/\mathfrak{m}_A^k)$. On construit par récurrence une suite compatible de représentations $\rho_k\ : G \to \mathrm{GL}_n(A/\mathfrak{m}_A^k)$ telles que ρ_k soit dans la classe $[\rho_k]$:

- Pour $k = 1$, on a forcément $\rho_1 = \overline{\rho}$.
- Supposons qu'on a défini les représentations $\rho_1, \ldots, \rho_{k-1}$. Choisissons un représentant $\widetilde{\rho_k}$ de la classe d'équivalence stricte $[\rho_k]$. Par projection, $\widetilde{\rho_k}$ induit une représentation $\widetilde{\rho_{k-1}}$ strictement équivalente à ρ_{k-1}. On écrit $\widetilde{\rho_{k-1}} = U^{-1}\rho_{k-1}U$, où U est une matrice appartenant à $\Gamma_n(A/\mathfrak{m}_A^{k-1})$. Soit V un relèvement arbitraire de U dans $\Gamma(A/\mathfrak{m}_A^k)$. On définit finalement $\rho_k = V\widetilde{\rho}_k V^{-1}$. La projection de ρ_k est alors ρ_{k-1} comme souhaité.

La suite compatible ρ_k induit une représentation qui se trouve dans :

$$\varprojlim_k \mathrm{Hom}(G, \mathrm{GL}_n(A/\mathfrak{m}_A^k)) \simeq \mathrm{Hom}(G, \varprojlim_k \mathrm{GL}_n(A/\mathfrak{m}_A^k)) \simeq \mathrm{Hom}(G, \mathrm{GL}_n(A)).$$

Sa classe d'équivalence stricte est un élément de $D(A)$ dont l'image dans $\varprojlim_k D(A/\mathfrak{m}_A^k)$ est $[\rho_k]$. Le morphisme $D(A) \to \varprojlim_k D(A/\mathfrak{m}_A^k)$ est donc surjectif.

— **Injectivité.** Soit deux déformations $[\rho], [\rho'] \in D(A)$ qui induisent une même suite compatible de déformations $[\rho_k] = [\rho'_k] \in D(A/\mathfrak{m}_A^k)$. On choisit des représentants ρ, ρ' des classes $[\rho], [\rho']$ et on définit ρ_k, ρ'_k les projections respectives de ρ, ρ' dans $\mathrm{Hom}(G, \mathrm{GL}_n(A/\mathfrak{m}_1^k))$. Comme dans la preuve de la surjectivité, on construit par récurrence un élément $M \in \varprojlim_k \Gamma_n(A/\mathfrak{m}_A^k) \simeq \Gamma_n(A)$ tel que $\rho_k = M_k^{-1}\rho'_k M_k$. Puisque $\mathrm{GL}_n(A) \simeq \varprojlim_k \mathrm{GL}_n(A/\mathfrak{m}_A^k)$, on a $\rho = M^{-1}\rho' M$ et finalement $[\rho] = [\rho']$. □

Outre le fait que la proposition 2.14 donne des raisons de croire en la représentabilité du foncteur des déformations, elle nous permet de nous recentrer sur l'étude du cas artinien. En effet, puisque tout anneau de coefficients est limite projective d'une suite d'anneaux dans $\mathcal{C}^0$, son image par le foncteur des déformations est (par continuité) la limite des images de ses quotients : en quelque sorte, la sous-catégorie $\mathcal{C}^0$ est « dense » dans $\mathcal{C}$. Cette observation donne lieu à la notion de pro-représentabilité (Définition 3.1).

Chapitre 3

Le critère de Schlessinger

Dans ce chapitre, on énonce et démontre le critère de Schlessinger, qui donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un foncteur $\mathcal{C}^0 \to \mathbf{Set}$ soit représentable. Dans le chapitre 4, on applique ce critère au foncteur des déformations afin de démontrer un théorème de Mazur établissant l'existence d'anneaux de déformations pour les représentations galoisiennes (sous de bonnes hypothèses).

Pro-représentabilité. Pour être capable d'examiner les questions de représentabilité au niveau de la sous-catégorie $\mathcal{C}^0$ de $\mathcal{C}$, on introduit la notion de pro-représentabilité :

Définition 3.1. Soit $\mathcal{D}$ une catégorie. Un foncteur $F\ :\mathcal{D} \to \mathbf{Set}$ est *pro-représentable* s'il est colimite filtrée de foncteurs représentables.

Cette définition intrinsèque de la pro-représentabilité est motivée par le fait que si $\mathcal{D}$ se réalise comme sous-catégorie pleine d'une catégorie $\mathcal{D}'$ complète, alors on a pour tout objet $D \in \mathcal{D}$:

$$\begin{aligned} F(D) &\simeq \varinjlim_{k,\text{filtrée}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(D_k, D) \\ &= \varinjlim_{k,\text{filtrée}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}'}(D_k, D) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}'}\left(\varprojlim_{k,\text{filtrée}} D_k\ ,\ D\right), \end{aligned}$$

et il existe alors dans $\mathcal{D}'$ un objet, obtenu comme limite projective d'objets de $\mathcal{D}$, représentant en un sens le foncteur F.

Cette définition nous intéresse dans la situation où $\mathcal{D} = \mathcal{C}^0$ et $\mathcal{D}' = \mathcal{C}$, et F est la restriction $D_{|\mathcal{C}^0}$ du foncteur des déformations. La question de la pro-représentabilité de F est alors équivalente à la question de la représentabilité du foncteur des déformations, puisque ce dernier est continu (Proposition 2.14) et que tout objet de $\mathcal{C}$ est limite projective d'objets de $\mathcal{C}^0$.

Une condition nécessaire de pro-représentabilité. Soit un foncteur $F\ :\mathcal{C}^0 \to \mathbf{Set}$, et des morphismes $A \to C$, $B \to C$ dans $\mathcal{C}^0$. Considérons l'application naturelle :

$$F\left(A \underset{C}{\times} B\right) \to F(A) \underset{F(C)}{\times} F(B)$$

induite par les morphismes $F\left(A \underset{C}{\times} B\right) \to F(A)$ et $F\left(A \underset{C}{\times} B\right) \to F(B)$ définis par fonctorialité à partir des projections canoniques de $A \underset{C}{\times} B$.

Lorsque F est (pro-)représentable, l'application ci-dessus est bijective, d'après la propriété universelle du produit fibré. Les critères qui suivent consistent à établir une sorte de réciproque à cette observation, et à montrer qu'il suffit de la vérifier pour quelques morphismes $A \to C$, $B \to C$ bien choisis.

3.1 Espaces tangents et nombres duaux

3.1.1 Espace (co)tangent

Soit A un anneau de coefficients.

Définition 3.2. L'*espace cotangent de* A, noté t_A^*, est le A-module quotient $\mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2$.

Proposition 3.3. *Soit $A \in \mathcal{C}$. L'espace cotangent t_A^* est muni d'une structure de k-espace vectoriel de dimension finie.*

Démonstration. Soit un scalaire $\lambda \in k$ et $\widetilde{\lambda}$ un relèvement arbitraire dans A. Soit un élément $x \in t_A^*$ et un relèvement arbitraire $\widetilde{x}$ de x dans $\mathfrak{m}_A$. D'autres choix de relèvements sont nécessairement de la forme $\widetilde{\lambda} + \delta_1$, $\widetilde{x} + \delta_2$ où $\delta_1 \in \mathfrak{m}_A$ et $\delta_2 \in \mathfrak{m}_A^2$. On a :

$$(\widetilde{\lambda} + \delta_1)(\widetilde{x} + \delta_2) = \underbrace{\widetilde{\lambda}\widetilde{x}}_{\in \mathfrak{m}_A} + \underbrace{\delta_1\widetilde{x} + \delta_2\widetilde{x} + \delta_1\delta_2}_{\in \mathfrak{m}_A^2},$$

ce qui montre que la classe dans $t_A^* = \mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2$ du produit $\widetilde{\lambda}\widetilde{x}$ ne dépend que de λ et de x : on la note λx. Cela induit une structure de k-espace vectoriel sur t_A^*. Puisque A est nœthérien, son idéal maximal $\mathfrak{m}_A$ est finiment engendré et donc t_A^* est de dimension finie comme k-espace vectoriel (après projection dans t_A^* des générateurs). □

Définition 3.4. L'*espace tangent de* A, noté t_A, est le k-espace vectoriel de dimension finie $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(t_A^*, k)$, dual de l'espace cotangent t_A^*.

Remarque 3.5. On peut être surpris par le fait qu'un morphisme $f : A \to B$ induise des applications $d^*f : t_A^* \to t_B^*$ et $df : t_B \to t_A$. Par rapport à la situation en géométrie différentielle, dont ces définitions s'inspirent, les applications entre espaces tangents semblent être dans le mauvais sens. En réalité, c'est le morphisme $A \to B$ qui est « à l'envers » : tout rentre dans l'ordre si l'on voit f comme un morphisme de schémas $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$.

3.1.2 Nombres duaux

Définition 3.6. L'anneau des *nombres duaux* $k[\varepsilon]$ est l'anneau de coefficients $k[X]/(X^2)$, dont on désigne systématiquement la variable comme ε.

On peut voir ε comme un élément infinitésimal. Cela est justifié par l'observation que, si P est un polynôme à coefficients dans k, on a $P(a + \varepsilon b) = P(a) + \varepsilon b P'(a)$.

Soit un anneau de coefficients A. L'utilisation des nombres duaux permet une autre description de l'espace tangent de A :

Proposition 3.7. *L'espace tangent t_A est isomorphe au k-espace vectoriel* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, k[\varepsilon])$.

Démonstration. Soit un morphisme $\varphi : A \to k[\varepsilon]$. Puisque φ induit l'identité sur le corps résiduel k, on peut écrire, pour tout $x \in A$:

$$\varphi(x) = \overline{x} + \varepsilon f(x)$$

pour une certaine application $f : A \to k$. L'application f est additive et détermine uniquement φ. De plus, si $x, y \in A$, on a :

$$\begin{aligned}\varphi(xy) &= \overline{xy} + \varepsilon f(xy) = \overline{xy} + \varepsilon f(xy) \\ &= \varphi(x)\varphi(y) = (\overline{x} + \varepsilon f(x))(\overline{y} + \varepsilon f(y)) = \overline{xy} + \varepsilon(\overline{x} f(y) + \overline{y} f(x)) + \cancel{\varepsilon^2(\dots)}\end{aligned}$$

et l'application f satisfait donc la relation de Leibniz :

$$f(xy) = \overline{x} f(y) + \overline{y} f(x).$$

Puisque φ est un morphisme de $W(k)$-algèbres, on a, pour tout $x \in k$:

$$\varphi([x]) = [x]\varphi(1) = [x]$$

Par définition du représentant de Teichmüller, on a $[x] = x$ dans tout anneau de caractéristique p, et en particulier dans $k[\varepsilon]$. Ainsi, on a $\varphi([x]) = x$ et donc $f([x]) = 0$. En particulier, $f(x) = f(x - [\overline{x}])$. Puisque $x - [\overline{x}] \in \mathfrak{m}_A$, la fonction f est entièrement déterminée par sa restriction $f_1 : \mathfrak{m}_A \to k$ à $\mathfrak{m}_A$, qui est additive. De plus, si $x, y \in \mathfrak{m}_A$, alors :

$$f_1(xy) = \underbrace{\overline{x}}_{0} f_1(y) + \underbrace{\overline{y}}_{0} f_1(x) = 0.$$

Ainsi, f_1 s'annule sur $\mathfrak{m}_A^2$, et induit donc une application $f_2 : \mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2 \to k$ qui caractérise uniquement φ. Enfin, f_2 est une application k-linéaire : en effet, pour tous $m \in \mathfrak{m}_A$ et $\lambda \in k$ de représentant de Teichmüller $[\lambda] \in A$, on a :

$$f_2(\lambda m) = f([\lambda] m) = \overline{[\lambda]} f(m) + \underbrace{\overline{m}}_{0} f([\lambda]) = \lambda f_2(m).$$

Réciproquement, étant donné une application k-linéaire $f_2' : \mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2 \to k$, on définit un morphisme d'anneaux de coefficients $\varphi' : A \to k[\varepsilon]$ par la formule $\varphi'(x) = \overline{x} + \varepsilon f_2'(x - [\overline{x}])$. Ces deux constructions, inverses l'une de l'autre, donnent lieu à un isomorphisme canonique entre $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, k[\varepsilon])$ et $\mathrm{Hom}_{k-\mathbf{Vect}}(\mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2, k) = t_A$, ce qui conclut la preuve. □

Si f est un morphisme $A \to B$, l'application linéaire $df : t_B \to t_A$ qu'il induit et l'application $\circ f : \mathrm{Hom}(B, k[\varepsilon]) \to \mathrm{Hom}(A, k[\varepsilon])$ s'insèrent dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} t_B \arrow[r, "df"] \arrow[d, phantom, "\wr"] & t_A \arrow[d, phantom, "\wr"] \\ \mathrm{Hom}(B, k[\varepsilon]) \arrow[r, "\circ f"] & \mathrm{Hom}(A, k[\varepsilon]) \end{tikzcd}$$

3.1.3 Espace tangent d'un foncteur

Soit F un foncteur $\mathcal{C}^0 \to \mathbf{Set}$. Par une analogie (expliquée par la proposition 3.9), on définit l'espace tangent du foncteur F de la façon suivante :

Définition 3.8. L'*espace tangent* t_F est l'ensemble $F(k[\varepsilon])$.

De la proposition 3.7 découle immédiatement la proposition suivante, qui fait le lien entre les espaces tangents de la définition 3.8 et ceux de la définition 3.2 :

Proposition 3.9. *Si F est pro-représenté par un anneau $R \in \mathcal{C}$, alors $t_F \simeq t_R$.*

En particulier, si F est pro-représentable, alors t_F est muni d'une structure de k-espace vectoriel de dimension finie par la proposition 3.3. On va déduire de cette remarque une condition nécessaire de pro-représentabilité. Pour cela, on commence par munir t_F d'une structure canonique d'espace vectoriel sous des hypothèses plus faibles :

Lemme 3.10. *Supposons que l'application :*

$$F\left(k[\varepsilon] \underset{k}{\times} k[\varepsilon]\right) \to \underbrace{F(k[\varepsilon]) \times F(k[\varepsilon])}_{t_F^2}$$

soit bijective. Alors t_F est muni d'une structure naturelle de k-espace vectoriel.

Démonstration. Il s'agit de définir la somme et la multiplication par des scalaires.

- **Somme.** La somme doit être une application $t_F^2 \to t_F$. Vu l'hypothèse, il suffit de définir une application
$$F\left(k[\varepsilon] \underset{k}{\times} k[\varepsilon]\right) \to \underbrace{F(k[\varepsilon])}_{t_F}.$$
Un élément de $k[\varepsilon] \underset{k}{\times} k[\varepsilon]$ est un couple $(a+b\varepsilon, a+b'\varepsilon)$. On définit un morphisme d'addition $k[\varepsilon] \underset{k}{\times} k[\varepsilon] \to k[\varepsilon]$ par la formule $(a+b\varepsilon, a+b'\varepsilon) \mapsto (a+(b+b')\varepsilon)$. Le foncteur F envoie ce morphisme sur une application d'addition $t_F^2 \to t_F$, qui fait de t_F un groupe abélien.
- **Multiplication par un scalaire.** Soit $\lambda \in k$. Le foncteur F envoie l'endomorphisme de $k[\varepsilon]$ défini par la formule $a+b\varepsilon \mapsto a+\lambda b\varepsilon$ sur un endomorphisme de $F(k[\varepsilon])$ (c'est-à-dire une application $t_F \to t_F$) de multiplication par le scalaire λ.

On vérifie aisément que l'addition et la multiplication scalaire ainsi définies sont compatibles et munissent t_F d'une structure naturelle de k-espace vectoriel. □

Le lemme 3.10 permet de donner un sens à l'hypothèse « t_F est de dimension finie ». Vu la proposition 3.3, cette hypothèse constitue une condition nécessaire pour la représentabilité, dont on fait un usage fréquent dans les énoncés de la section 3.2. Notons que, dans le cas déjà intéressant où k est fini, il aurait suffi de demander que l'ensemble t_F soit fini.

On introduit une notation supplémentaire :

Définition 3.11. Si I est un k-espace vectoriel de dimension finie, on désigne par $k[I]$ la k-algèbre dont les éléments sont de la forme $\sum_{i\in I} a_i i$ (avec un nombre fini de $a_i \in k$ non nuls), satisfaisant aux relations :

- Soit $i, i' \in I$, et soit $i'' \in I$ la somme de i et i' dans I. Alors, on a l'égalité $i + i' = i''$ dans $k[I]$.
- Soit $\lambda \in k$, $i \in I$, et soit $i' \in I$ le produit du scalaire λ par i dans I. Alors, on a l'égalité $i' = \lambda i$ dans $k[I]$.
- Si $i, i' \in I$, alors $ii' = 0$ dans $k[I]$.

Alternativement, si $(b_1, \dots, b_r)$ est une k-base de I, alors $k[I]$ est le quotient de la k-algèbre librement engendrée par $b_1, \dots, b_r$ par l'idéal engendré par les éléments $b_i b_j$.

Par exemple, si I est la droite engendrée par un vecteur ε, alors $k[I]$ est $k[\varepsilon]$ tel que défini dans la définition 3.6. Si I, I' sont deux k-espaces vectoriels, alors $k[I \oplus I']$ est naturellement isomorphe à $k[I] \times_k k[I']$. Ainsi, le choix d'une base $b_1, \dots, b_r$ d'un k-espace vectoriel I induit un isomorphisme de k-algèbres :

$$k[I] \simeq \underbrace{k[\varepsilon] \times k[\varepsilon] \times \ldots \times k[\varepsilon]}_{r}.$$

On démontre le lemme suivant :

Lemme 3.12. *On suppose que, quels que soient les k-espaces vectoriels I et I', le foncteur F satisfait $F(k[I \oplus I']) \simeq F(k[I]) \times F(k[I'])$. Alors, pour tout espace vectoriel I, on a canoniquement $F(k[I]) \simeq t_F \otimes_k I$.*

Démonstration. Soit $(b_1, \dots, b_r)$ une k-base de I. Ce choix induit un isomorphisme $k[I] \simeq k[\varepsilon]^r$, et par fonctorialité de F un isomorphisme $F(k[I]) \simeq F(k[\varepsilon]^r)$. Par l'hypothèse, il vient $F(k[\varepsilon]^r) \simeq F(k[\varepsilon])^r = (t_F)^r \simeq t_F \otimes_k I$.

Le choix d'une base ne change pas l'isomorphisme obtenu, qui peut être défini de manière canonique. En effet, une variante du lemme 3.10 montre (en utilisant l'hypothèse) que $F(k[I])$ est muni d'une structure naturelle de k-espace vectoriel. L'application :

$$\alpha : \begin{cases} I & \to & \mathrm{Hom}_k(k[\varepsilon], k[I]) \\ i & \mapsto & (\varepsilon \mapsto i) \end{cases}$$

définit une bijection entre I et l'ensemble des morphismes $k[\varepsilon] \to k[I]$. On en tire, par fonctorialité de F, une application :

$$\begin{cases} t_F \times I & \to & F(k[I]) \\ (f, i) & \mapsto & F(\alpha(i))(f) \end{cases}$$

qui est k-bilinéaire pour la structure naturelle de k-espace vectoriel de $F(k[I])$ et induit donc une application k-linéaire $t_F \otimes_k I \to F(k[I])$, qui coïncide avec l'isomorphisme décrit ci-dessus. $\square$

3.2 Énoncé du critère de Schlessinger

3.2.1 Critère de Grothendieck

Dans les paragraphes précédents, nous avons obtenu deux conditions nécessaires de pro-représentabilité (F commute avec les produits fibrés et t_F est de dimension finie). Il se trouve que leur conjonction est une condition suffisante au sens suivant :

Théorème 3.13 (critère de Grothendieck)**.** *Soit $F : \mathcal{C}^0 \to$ **Set** un foncteur. On suppose que $F(k)$ est un singleton*[1]*. Alors F est pro-représentable si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. C'est le cas pour les déformations, puisque la seule déformation de la représentation résiduelle à k est elle-même ; cette hypothèse nous place donc dans le cas qui nous intéresse.

1. *Quels que soient les morphismes $A \to C$, $B \to C$, l'application canonique*

$$F\left(A \underset{C}{\times} B\right) \to F(A) \underset{F(C)}{\times} F(B)$$

est bijective.

2. *Le k-espace vectoriel $t_F = F(k[\varepsilon])$ est de dimension finie (ce qui a un sens lorsque la condition précédente est satisfaite).*

On ne donne pas de démonstration du théorème 3.13 puisqu'il découle du théorème 3.20, plus général, démontré plus tard. On trouve néanmoins une preuve dans [Gou91, pp. 105-109]. La première hypothèse du théorème 3.13 est peu commode à vérifier puisqu'il faut la vérifier pour *tous* les produits fibrés. De plus, la pro-représentabilité est une conclusion forte, qu'il est possible de raisonnablement affaiblir. Le critère de Schlessinger (théorème 3.20) améliore le théorème 3.13 sur ces deux points.

3.2.2 Anneaux de déformations versels et enveloppes

Pour commencer, on généralise la notion de représentant d'un foncteur :

Définition 3.14. L'anneau de coefficients R est un *anneau de déformation versel* du foncteur $F\ : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ s'il existe une transformation naturelle

$$\Phi\ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(R, -) \to F$$

telle que pour tout morphisme surjectif $p : B \to A$ entre éléments de $\mathcal{C}$, l'application

$$\begin{cases} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(R, B) & \to & F(B) \times_{F(A)} \mathrm{Hom}(R, A) \\ \varphi & \mapsto & (\Phi_B(\varphi),\, p \circ \varphi) \end{cases}$$

soit surjective.

De la transformation naturelle $\Phi\ : \mathrm{Hom}(R, -) \to F$ associée à un anneau de déformation versel R, on déduit une application linéaire $d\Phi\ : t_R \to t_F$, en considérant $\Phi_{k[\varepsilon]}$ et en se souvenant que $t_R \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(R,\, k[\varepsilon])$.

Définition 3.15. Une *enveloppe* du foncteur $F\ : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ est un anneau de déformation versel R tel que l'application linéaire $d\Phi\ : t_R \to t_F$ soit un isomorphisme.

Proposition 3.16. *Si R est une enveloppe du foncteur F, et si R' est un anneau de déformation versel de F, alors il existe une surjection $R' \to R$.*

Démonstration. Par définition, on a deux transformations naturelles :

$$\Phi\ : \mathrm{Hom}(R, -) \to F \qquad \text{et} \qquad \Phi'\ : \mathrm{Hom}(R', -) \to F$$

telles que pour toute surjection $p : B \to A$, les applications induites $\mathrm{Hom}(R', B) \to F(B) \times_{F(A)} \mathrm{Hom}(R', A)$ et $\mathrm{Hom}(R, B) \to F(B) \times_{F(A)} \mathrm{Hom}(R, A)$ soient surjectives.

Considérons l'image ξ de id_R par Φ_R. Il s'agit d'un élément de $F(R)$, qui est donc image par Φ'_R d'un morphisme $f\ : R' \to R$. Ce morphisme f induit une application linéaire $d^*f\ : t^*_{R'} \to t^*_R$. Par ailleurs, on a une transformation naturelle $\circ f\ : \mathrm{Hom}(R, -) \to \mathrm{Hom}(R', -)$. Étant donné un morphisme $\varphi\ : R \to A$, on a par naturalité de Φ' et Φ :

$$\Phi'_A(\varphi \circ f) = F(\varphi)(\xi) = \Phi_A(\varphi),$$

d'où on déduit $\Phi'_A \circ (\circ f)_A = \Phi_A$. En particulier, pour $A = k[\varepsilon]$, on obtient $d\Phi' \circ (\circ f)_{k[\varepsilon]} = d\Phi$. Par hypothèse, $d\Phi$ est un isomorphisme, et donc $(\circ f)_{k[\varepsilon]} = df$ est injective, ce qui entraîne que l'application duale d^*f est surjective [2]. D'après le lemme 3.21, le morphisme $f : R' \to R$ est donc surjectif. $\square$

La proposition 3.16 s'interprète comme un résultat de *minimalité* [3] des enveloppes au sein des anneaux de déformations versels. On en déduit notamment (par le lemme de Yoneda) qu'une enveloppe, lorsqu'elle existe, est unique à un isomorphisme canonique près. La notion d'enveloppe affaiblit la notion de représentant, comme le montre la propriété suivante :

Proposition 3.17. *Si R représente le foncteur F, alors R est une enveloppe du foncteur F.*

Démonstration. Par hypothèse, il existe un isomorphisme Φ de foncteurs :

$$\Phi\ : \mathrm{Hom}(R, -) \xrightarrow{\sim} F.$$

Soit un morphisme surjectif $p : B \to A$ dans $\mathcal{C}$, et soit un couple $(b, f) \in F(B) \times_{F(A)} \mathrm{Hom}(R, A)$. On pose $\beta = \Phi_B^{-1}(b)$. Alors :

$$p \circ \beta = \Phi_A^{-1}(\Phi_A(p \circ \beta)) = \Phi_A^{-1}(F(p)(\Phi_B(\beta))) = \Phi_A^{-1}(F(p)(b)) = \Phi_A^{-1}(\Phi_A(f)) = f,$$

donc β est un antécédent de (b, f) dans $\mathrm{Hom}(R, B)$. Cela montre la surjectivité de $\mathrm{Hom}(R, B) \to F(B) \times_{F(A)} \mathrm{Hom}(R, A)$, donc R est un anneau de déformation versel. Par ailleurs, $d\Phi = \Phi_{k[\varepsilon]}$ est un isomorphisme, donc R est une enveloppe. $\square$

Supposons que F admette une enveloppe R. On obtient alors une « déformation verselle » $\rho_0 = \Phi_R(\mathrm{id}_R)$ qui est la « meilleure approximation » d'une déformation universelle. Soit ρ un élément de $F(A)$ avec $A \in \mathcal{C}$ (dans l'idée, ρ est une déformation) ; il existe par hypothèse un morphisme $\widetilde{\rho}\ : R \to A$ tel que $\Phi_A(\widetilde{\rho}) = \rho$. De la définition d'une transformation naturelle, on déduit :

$$\rho = \Phi_A(\widetilde{\rho}) = \Phi_A(\widetilde{\rho} \circ \mathrm{id}_R) = F(\widetilde{\rho})(\Phi_R(\mathrm{id}_R)) = F(\widetilde{\rho})(\rho_0).$$

Ainsi, toute déformation à A s'obtient à partir de ρ_0 et d'un morphisme $R \to A$, mais de manière potentiellement non-unique : plusieurs morphismes peuvent donner la même déformation. Cela illustre la différence entre les enveloppes et les anneaux de déformation universelle : les enveloppes permettent de paramétrer les déformations, mais de manière potentiellement redondante.

3.2.3 Petites extensions

On définit une classe particulière de surjections, qu'on voit comme « infinitésimales » en cela qu'elles ressemblent à la surjection $k[\varepsilon] \to k$:

Définition 3.18. Une surjection $p \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^0}(B, A)$ est une *petite extension* lorsque son noyau est un idéal principal (t) de B et si, en notant $\mathfrak{m}_B$ l'idéal maximal de B, on a $\mathfrak{m}_B t = 0$.

L'utilité principal de la notion de petites extensions, pour nous, provient du fait qu'il est souvent possible de démontrer des propriétés d'un morphisme quelconque à partir du cas des petites extensions, en vertu du lemme suivant :

2. Dire que df est injective revient à dire que d^*f est un épimorphisme, et les épimorphismes entre espaces vectoriels de dimension finie sont des surjections.

3. Cet usage étonnant du mot « minimal » prend tout son sens lorsqu'on pense en termes de schémas affines : $\mathrm{Spec}(R)$ s'injecte dans $\mathrm{Spec}(R')$.

Lemme 3.19. *Tout morphisme surjectif de $\mathcal{C}^0$ est une composition de petites extensions.*

Démonstration. Soit $p : B \twoheadrightarrow A$ un morphisme surjectif de $\mathcal{C}^0$. Soit $\mathfrak{m}_B$ l'idéal maximal de B. Soit I l'idéal $\ker(p)$ de B. L'anneau B étant artinien, on a $\mathfrak{m}_B^N = 0$ pour un entier N. On décompose $B \to A$ en surjections intermédiaires :

$$B = B/(\mathfrak{m}_B^N I) \twoheadrightarrow B/(\mathfrak{m}_B^{N-1} I) \twoheadrightarrow ... \twoheadrightarrow B/(\mathfrak{m}_B I) \twoheadrightarrow B/I \simeq A.$$

Considérons un entier $i \in \{0, \dots, N-1\}$ arbitraire. On pose $B_i = B/(\mathfrak{m}_B^i I)$ et on s'intéresse à la surjection $B_{i+1} \twoheadrightarrow B_i$, dont le noyau est un idéal J_{i+1} de B_{i+1}, inclus dans $\mathfrak{m}_B^i$. Puisque B_{i+1} est noethérien, l'idéal J_{i+1} est finiment engendré : on fixe des générateurs $t_{i,0}, t_{i,1}, \dots, t_{i,r_i} \in J_{i+1}$. On décompose alors $B_{i+1} \to B_i$ en surjections intermédiaires :

$$B_{i+1} \twoheadrightarrow B_{i+1}/(t_{i,0}) \twoheadrightarrow B_{i+1}/(t_{i,0}, t_{i,1}) \twoheadrightarrow \dots \twoheadrightarrow B_{i+1}/(t_{i,0}, t_{i,1}, \dots, t_{i,r_i}) = B_{i+1}/J_{i+1} \simeq B_i.$$

Soit $j \in \{0, \dots, r_i\}$ arbitraire. Pour conclure, il suffit de montrer que la surjection :

$$B_{i+1}/(t_{i,0}, t_{i,1}, \dots, t_{i,j-1}) \twoheadrightarrow B_{i+1}/(t_{i,0}, t_{i,1}, \dots, t_{i,j-1}, t_{i,j})$$

est une petite extension. Le noyau de cette surjection est l'idéal principal engendré par $t_{i,j}$, et on a $t_{i,j}\mathfrak{m}_B \subseteq \mathfrak{m}_B^i \mathfrak{m}_B = \mathfrak{m}_B^{i+1}$ qui est nul dans B_i. Cela conclut la preuve. $\square$

Le lemme 3.19, qui repose sur le caractère artinien des objets de $\mathcal{C}^0$, justifie en grande partie le choix d'étudier la pro-représentabilité dans $\mathcal{C}^0$ au lieu de la représentabilité dans $\mathcal{C}$. Ce lemme permet de simplifier la vérification des hypothèses du critère de Grothendieck : pour vérifier la bijectivité de l'application $F(A \times_C B) \to F(A) \times_{F(C)} F(B)$, on procède inductivement à partir du cas $A = B = k$, en remontant « petite extension par petite extension » le long des surjections $A, B \twoheadrightarrow k$. C'est l'idée centrale du critère de Schlessinger, qui donne de plus des critères d'existence d'une enveloppe.

3.2.4 Critère de Schlessinger

On énonce finalement le critère de Schlessinger. La démonstration est donnée dans la section 3.3.

Théorème 3.20 (critère de Schlessinger)**.** *Soit $F : \mathcal{C}^0 \to \mathbf{Set}$ un foncteur. On suppose que $F(k)$ est un singleton. Considérons l'application*

$$F\left(A \underset{C}{\times} B\right) \to F(A) \underset{F(C)}{\times} F(B)$$

associée à un couple de morphismes $A \to C$, $B \to C$ dans $\mathcal{C}^0$. Alors :

1. *F a une enveloppe si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites :*
   - *(i) Cette application est surjective chaque fois que $B \to C$ est une petite extension.*
   - *(ii) Cette application est bijective chaque fois que $C = k$ et $B = k[\varepsilon]$*
   - *(iii) Le k-espace vectoriel $t_F = F(k[\varepsilon])$ est de dimension finie (ce qui a un sens lorsque la condition (ii) est satisfaite, cf. lemme 3.10).*
2. *F est pro-représentable si et seulement si, de plus, cette application est bijective chaque fois que $A = B$ et que $A \to C$ est une petite extension.*

3.3 Démonstration du critère de Schlessinger

Dans cette section, on démontre le théorème 3.20. Cette section n'a aucun autre lien avec le reste du texte et peut être ignorée sans problème si l'on admet le critère de Schlessinger. Dans la sous-section 3.3.1, on démontre la condition nécessaire pour l'existence d'une enveloppe. Dans la sous-section 3.3.2, on montre que le deuxième point du théorème se déduit du premier : on se concentre alors sur la construction d'une enveloppe. Dans la sous-section 3.3.3, on démontre divers faits relatifs aux foncteurs $\mathcal{C}^0 \to \mathbf{Set}$, utiles pour la démonstration. Enfin, la sous-section 3.3.4 consiste en la construction de l'enveloppe proprement dite, sous les hypothèses du théorème 3.20.

3.3.1 Condition nécessaire

Montrons que l'existence d'une enveloppe implique les hypothèses du critère de Schlessinger. Soit R une enveloppe. Alors, il existe un $\xi \in F(R)$ tel que, pour toute surjection $p \ : \ B \to A$, l'application suivante (bien définie car $F(p \circ \varphi)(\xi) = F(p)(F(\varphi)(\xi))$) :

$$\begin{cases} \mathrm{Hom}(R, B) & \to & \mathrm{Hom}(R, A) \times_{F(A)} F(B) \\ \varphi & \mapsto & (p \circ \varphi, F(\varphi)(\xi)) \end{cases}$$

soit surjective. Par ailleurs, $t_R \simeq t_F$. On vérifie les différents points :

- Puisque $t_F \simeq t_R$, l'espace vectoriel t_F est de dimension finie.
- Soit une petite extension $B \to C$ et un morphisme $A \to C$. On souhaite montrer que l'application $F(A \times_C B) \to F(A) \times_{F(C)} F(B)$ est surjective. On a $\mathrm{Hom}(R, A \times_C B) \simeq \mathrm{Hom}(R, A) \times_{\mathrm{Hom}(R,C)} \mathrm{Hom}(R, B)$ par propriété universelle du produit fibré, et l'application $\mathrm{Hom}(R, A) \times_{\mathrm{Hom}(R,C)} \mathrm{Hom}(R, B) \to F(A) \times_{F(C)} F(B)$ est surjective parce que R est un anneau versel. Du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(R, A \times_C B) \arrow[rr, "F(-)(\xi)"] \arrow[d, phantom, "\wr"] & & F(A \times_C B) \arrow[d, "F(\mathrm{pr}_1) \times F(\mathrm{pr}_2)"] \\ \mathrm{Hom}(R, A) \times_{\mathrm{Hom}(R,C)} \mathrm{Hom}(R, B) \arrow[rr, two heads] & & F(A) \times_{F(C)} F(B) \end{tikzcd}$$

  on déduit alors que l'application $F(A \times_C B) \to F(A) \times_{F(C)} F(B)$ est surjective.
- Enfin, il faut montrer que $F(A \times_k k[\varepsilon]) \to F(A) \times t_F$ est une bijection. La surjectivité résulte du cas précédent ($k[\varepsilon] \to k$ étant une petite extension). Supposons donc que deux éléments a_1, a_2 de $F(A \times_k k[\varepsilon])$ soient envoyés sur le même élément $\widetilde{a} \in F(A) \times t_F$. Puisque R est une enveloppe, il existe deux morphismes $\alpha_1, \alpha_2 \ : R \to A \times_k k[\varepsilon]$ qui sont envoyés sur a_1, a_2 par l'application $F(-)(\xi)$, et tels que $\mathrm{pr}_1 \circ \alpha_1 = \mathrm{pr}_1 \circ \alpha_2$.

  De plus on sait que $F(\mathrm{pr}_2 \circ \alpha_1)(\xi) = F(\mathrm{pr}_2 \circ \alpha_2)(\xi) \in t_F$. L'application $F(-)(\xi) \ : t_R \to t_F$ étant un isomorphisme, on a donc $\mathrm{pr}_2 \circ \alpha_1 = \mathrm{pr}_2 \circ \alpha_2$, et finalement $\alpha_1 = \alpha_2$ d'où $a_1 = a_2$.

3.3.2 Existence d'un pro-représentant

Montrons que le point 2 du théorème 3.20 se déduit du point 1. La condition additionnelle étant effectivement nécessaire, il suffit de montrer que l'hypothèse additionnelle associée à l'existence d'une enveloppe suffit à construire un pro-représentant. On suppose donc que F a une enveloppe R, et que l'hypothèse du point 2 est satisfaite.

Pour montrer que R est un pro-représentant, on doit montrer que pour tout anneau de coefficients A, il y a une bijection naturelle entre $\mathrm{Hom}(R, A)$ et $F(A)$. On procède par récurrence sur le nombre minimal de petites extensions en lesquelles la surjection $A \twoheadrightarrow k$ se factorise. Lorsque $A = k$ (la surjection $A \twoheadrightarrow k$ est la composition de « 0 petites extensions »), c'est clair : $F(k)$ est réduit à un singleton, tout comme $\mathrm{Hom}(R, k)$ dont le seul élément est la réduction modulo l'idéal maximal. Supposons alors que $p\ : A \twoheadrightarrow B$ soit une petite extension et que B est un anneau de coefficients tel que $\mathrm{Hom}(R, B) \simeq F(B)$. On a $B \simeq A/\ker(p)$ et $\ker(p) = (t)$ avec $t\mathfrak{m}_A = 0$. On a aussi :

$$A \underset{B}{\times} A \simeq A \underset{k}{\times} k[t]$$

via l'isomorphisme $(x, y) \mapsto (x, \overline{x}+y-x)$, où $\overline{x}$ est l'image dans k de x, et où $y-x \in \ker(p) = (t)$ car y et x ont même image dans B. Par le lemme 3.12, $F(k[t]) = t_F \otimes (t)$. Vu l'hypothèse additionnelle, on a :

$$F(A) \underset{F(B)}{\times} F(A) \simeq F\left(A \underset{B}{\times} A\right) \simeq F\left(A \underset{k}{\times} k[t]\right) \simeq F(A) \times \big(t_F \otimes (t)\big)$$

Cet isomorphisme permet de définir une action de $t_F \otimes (t)$ sur $F(A)$: pour un élément $\delta \in t_F \otimes (t)$ et $\rho \in F(A)$, on regarde l'élément de $F(A) \times_{F(B)} F(A)$ associé au couple (ρ, δ) et on récupère sa deuxième coordonnée, qui est un nouvel élément de $F(A)$. Cette action préserve l'image dans $F(B)$: il s'agit donc d'une action sur chaque fibre $F(p)^{-1}(b)$ (pour $b \in F(B)$). Moralement, on a paramétré par $t_F \otimes (t)$ les différentes déformations à A qui induisent une même déformation sur B. Vu l'isomorphisme ci-dessus, cette action est libre et transitive.

Tout ce que nous avons dit au sujet de F vaut pour le foncteur $h_R = \mathrm{Hom}(R, -)$: il y a donc également une action libre et transitive de $t_F \otimes (t)$ sur les fibres $h_R(p)^{-1}(b)$ pour $b \in h_R(B)$. Par hypothèse de récurrence, $F(B)$ est isomorphe à $h_R(B)$. De plus, R étant une enveloppe de F, il y a une surjection

$$\Phi_A\ : h_R(A) \to F(A)$$

induisant des surjections $\Phi_{A,b}\ : h_R(p)^{-1}(\widetilde{b}) \to F(p)^{-1}(b)$ sur chaque fibre (par la propriété de transformation naturelle), où $\widetilde{b} \in F(B)$ et $b = \Phi_B(\widetilde{b})$. Par ailleurs, l'action de $t_F \otimes (t)$ sur $h_R(p)^{-1}(\widetilde{b})$ est envoyée par $\Phi_{A,b}$ sur l'action de $t_F \otimes (t)$ sur $F(p)^{-1}(b)$. Supposons que $x, y \in h_R(p)^{-1}(\widetilde{b})$ aient même image $z \in F(p)^{-1}(b)$. Par transitivité de l'action, il existe $\lambda \in t_F \otimes (t)$ tel que $y = \lambda \cdot x$. En appliquant $\Phi_{A,b}$, on trouve alors $z = \lambda.z$ ce qui entraîne $\lambda = 1$ par liberté de l'action. Ainsi, Φ_A est bijective, ce qui conclut la preuve.

3.3.3 Surjections entre anneaux de coefficients

Dans cette sous-section, nous démontrons quelques lemmes au sujet des surjections entre anneaux de coefficients. On se place dans le cas où le k-espace vectoriel $t_F = F(k[\varepsilon])$ est muni d'une structure naturelle de k-espace vectoriel (cf. lemme 3.10) pour laquelle il est de dimension finie. Les propriétés démontrées ici seront utilisées pour construire une enveloppe sous les hypothèses du critère de Schlessinger.

Lemme 3.21. *Soit $A, B \in \mathcal{C}$ et un morphisme $p : B \to A$. Alors p est surjectif si et seulement si l'application linéaire $d^*p\ : t_B^* \to t_A^*$ induite par p est surjective.*

Démonstration. Si p est surjectif, alors d^*p est clairement surjective. Supposons d^*p surjective. Montrons d'abord que pour tout $n \geq 0$, l'application $p_n\ : \mathfrak{m}_A^n/\mathfrak{m}_A^{n+1} \to \mathfrak{m}_B^n/\mathfrak{m}_B^{n+1}$ est surjective :

— Pour $n = 0$, cela provient de ce que p est un morphisme de $\mathcal{C}$ et induit donc l'identité sur les corps résiduels ;

— Pour $n \geq 1$, on procède par récurrence en supposant p_{n-1} surjective. Soit $y \in \mathfrak{m}_B^n$. Il suffit de considérer le cas où $y = y_0 y'$ avec $y_0 \in \mathfrak{m}_B^{n-1}$ et $y' \in \mathfrak{m}_B$ car tout élément de $\mathfrak{m}_B^n$ est somme de tels éléments. Puisque d^*p est surjective, il existe $x' \in \mathfrak{m}_A$ tel que $p(x') - y' \in \mathfrak{m}_B^2$. Par hypothèse de récurrence, il existe $x_0 \in \mathfrak{m}_A^{n-1}$ tel que $y_0 - p(x_0) \in \mathfrak{m}_B^n$. On calcule alors :

$$\begin{aligned} p(x_0 x') &= \Big(y_0 + p(x_0) - y_0\Big)\Big(y' + p(x') - y'\Big) \\ &= \underbrace{y_0 y'}_{=y} + \underbrace{y_0\Big(p(x') - y'\Big)}_{\in \mathfrak{m}_B^{n-1}\mathfrak{m}_B^2} + \underbrace{\Big(p(x_0) - y_0\Big)y'}_{\in \mathfrak{m}_B^n \mathfrak{m}_B} + \underbrace{\Big(p(x_0) - y_0\Big)\Big(p(x') - y'\Big)}_{\in \mathfrak{m}_B^n \mathfrak{m}_B^2} \\ &\in y + \mathfrak{m}_B^{n+1} \end{aligned}$$

et donc $x_0 x'$ est un antécédent de y par p_n.

Soit $y \in B$ non nul. On définit par récurrence une suite $x_1, x_2, \ldots$ d'éléments de A telle que $x_k = x_{k+1}$ modulo $\mathfrak{m}_A^k$ et $p(x_k) = y$ modulo $\mathfrak{m}_B^k$. On pose d'abord $x_0 = 1$. Supposons $x_0, \ldots, x_k$ définis. Alors $y - p(x_k)$ appartient à $\mathfrak{m}_B^k$. Par surjectivité de p_k, il existe un $t_k \in \mathfrak{m}_A^k$ tel que $p(t_k) = y - p(x_k)$ modulo $\mathfrak{m}_B^{k+1}$. On pose alors $x_{k+1} = x_k + t_k$. Par complétude de A, la suite x_k a une limite $x \in A$. Par continuité de p, on a $p(x) = y$. Cela montre la surjectivité de p. □

Définition 3.22. Une surjection $p \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ est *essentielle* si tout morphisme $q \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, B)$ tel que $p \circ q$ soit surjectif est surjectif.

Lemme 3.23. *Une surjection $p : B \to A$ est essentielle si et seulement si $d^*p : t_B^* \to t_A^*$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Supposons que d^*p soit un isomorphisme. Soit une surjection $q : C \to B$ telle que $p \circ q$ soit surjective. D'après le lemme 3.21, $d^*(p \circ q)$ est surjective. Mais alors $d^*q = (d^*p)^{-1} \circ d^*(p \circ q)$ est surjective et donc q est surjective, toujours par le lemme 3.21.

Réciproquement, supposons p essentielle. Soit $t_1, \ldots, t_r$ des éléments de $\mathfrak{m}_B$ dont les images dans t_A^*, obtenues par application de p puis projection, forment une base de cet espace vectoriel, de dimension finie par hypothèse. On définit la sous-algèbre $C = W(k)[t_1, \ldots, t_r]$ de B. Par définition des t_i, l'application d^*p induit une surjection de l'espace tangent de C sur celui de A, et donc la restriction de p à C est surjective par le lemme 3.21. Autrement dit, si on note i l'injection $C \to B$, on a $p \circ i$ surjective. Puisque p est supposée essentielle, i est surjective et donc $B = C$. On en déduit que $\dim t_B^* = \dim t_C^* \leq r = \dim t_A^*$. Puisque p est surjective, l'application linéaire $d^*p : t_B^* \to t_A^*$ est surjective (lemme 3.21) et, vu l'inégalité entre les dimensions, c'est un isomorphisme. □

Une section s d'une surjection $p : B \to A$ est un morphisme $A \to B$ tel que $p \circ s = \mathrm{id}_A$. Cette notion est reliée à la notion de surjection essentielle par le lemme suivant :

Lemme 3.24. *Soit $p : B \to A$ une petite extension qui n'est pas un isomorphisme. Alors p est essentielle si et seulement si p n'admet pas de section $s : A \to B$.*

Démonstration. Supposons que p admette une section s. Alors $p \circ s = \mathrm{id}_A$ est surjective, mais s n'est pas surjective — sinon p serait un isomorphisme. Donc p n'est pas essentielle.

Réciproquement, supposons p non essentielle. Définissons la sous-algèbre C de B comme dans la démonstration du lemme 3.23. On a $t_C^* \simeq t_A^*$, et le lemme 3.23 entraîne donc que la restriction de p à C est essentielle. Cela montre que C est un sous-anneau propre de B. Ainsi la longueur de C est strictement plus petite que celle de B. Puisque p est une petite extension qui n'est pas un isomorphisme, la longueur de B vaut un de plus que celle de A, car on a la suite exacte $0 \to \ker(p) \to B \to A \to 0$ et que $\ker(p)$ est de longueur 1 (engendré par un élément t non nul vérifiant $t\mathfrak{m}_B = 0$, de sorte qu'aucun idéal non nul de B ne soit strictement inclus dans $\ker(p)$). Ainsi, la longueur de C est au plus égale à la longueur de A. Puisque $p_{|C} : C \to A$ est une surjection, ces longueurs sont donc égales et $p_{|C}$ est un isomorphisme entre C et A en tant que surjection entre modules de même longueur. Si on note s son inverse, on obtient une section $A \to C \subseteq B$ comme annoncé. $\square$

Enfin, on introduit la notion de transformation naturelle formellement lisse :

Définition 3.25. Une transformation naturelle $\Phi : F \Rightarrow G$ est *formellement lisse* si pour toute surjection $p \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$, l'application $F(B) \to F(A) \underset{G(A)}{\times} G(B)$ induite par $F(p)$ et Φ_B est une surjection.

On omet les démonstrations (assez limpides) des propriétés suivantes :

Proposition 3.26.

- *Pour vérifier qu'une transformation naturelle est formellement lisse, il suffit de considérer le cas où la surjection p (avec les notations de la définition 3.25) est une petite extension.*
- *La composition de deux transformations formellement lisses est formellement lisse.*
- *Un anneau de coefficients R est une enveloppe de F si et seulement s'il existe une transformation naturelle* $\mathrm{Hom}(R, -) \Rightarrow F$ *formellement lisse induisant une bijection $t_R \to t_F$.*

3.3.4 Existence d'une enveloppe

Dans cette sous-section, on démontre l'existence d'une enveloppe en suivant [Vak00]. On a un foncteur $F : \mathcal{C}^0 \to \mathbf{Set}$ tel que $F(k)$ soit un singleton. On demande que l'application canonique :

$$F\left(A \underset{C}{\times} B\right) \to F(A) \underset{F(C)}{\times} F(B)$$

associée à un couple de morphismes $A \to C$, $B \to C$ dans $\mathcal{C}^0$ soit :

(i) surjective lorsque $B \to C$ est une petite extension, et cela vaut alors pour toutes les surjections par le lemme 3.19 ;

(ii) bijective lorsque $C = k$ et $B = k[\varepsilon]$.

De plus, on suppose que le k-espace vectoriel $t_F = F(k[\varepsilon])$, bien défini par l'hypothèse (ii) et le lemme 3.10, est de dimension finie.

Construction de l'enveloppe. Soit $t_1, \ldots, t_r$ une base de t_F^*. On désigne par $t_1^*, \ldots, t_r^*$ la base duale de t_F (satisfaisant $t_i^*(t_i) = 1$) et on pose $S = W(k)[\![T_1, \ldots, T_r]\!]$. On définit la $W(k)$-algèbre :

$$R_2 = S/(p + \mathfrak{m}_S^2).$$

Un élément de R_2 s'écrit uniquement sous la forme $w_0 + \sum_{i=1}^r w_i T_i$ où $w_i \in k$. La multiplication est donnée par :

$$\left(w_0 + \sum_{i=1}^r w_i T_i\right)\left(w_0' + \sum_{i=1}^r w_i' T_i\right) = w_0 w_0' + \sum_{i=1}^r (w_0 w_i' + w_0' w_i) T_i.$$

On vérifie que l'application :

$$\begin{cases} R_2 & \to & \underbrace{k[\varepsilon] \times_k \ldots \times_k k[\varepsilon]}_{r} \\ w_0 + \sum_{i=1}^r w_i T_i & \mapsto & (w_0 + w_1\varepsilon, \ldots, w_0 + w_i \varepsilon) \end{cases}$$

est un isomorphisme de $W(k)$-algèbres. On a alors :

$$\begin{aligned} F(R_2) &\simeq F(k[\varepsilon] \times_k \ldots \times_k k[\varepsilon]) \\ &\simeq F(k[\varepsilon]) \times_{F(k)} \ldots \times_{F(k)} F(k[\varepsilon]) && \text{en appliquant } r-1 \text{ fois l'hypothèse (ii)} \\ &\simeq t_F^r && \text{car } F(k) \text{ est un singleton} \\ &\simeq \mathrm{Hom}(t_F, t_F) && \text{car } r = \dim t_F. \end{aligned}$$

Soit ξ_2 l'élément de $F(R_2)$ correspondant à $\mathrm{id}_{t_F} \in \mathrm{Hom}(t_F, t_F)$. On définit une application $\varphi_2 : t_{R_2} \to t_F$ de la manière suivante : étant donné un élément $x \in t_{R_2}$, qu'on voit comme un morphisme $R_2 \to k[\varepsilon]$, le foncteur F induit une application $F(R_2) \to t_F$; on pose alors $\varphi_2(x) \overset{\text{déf}}{=} F(x)(\xi_2) \in t_F$.

Pour un entier $i \in \{1, \ldots, r\}$, déterminons l'image par φ_2 du morphisme de $W(k)$-algèbres $x_i : R_2 \to k[\varepsilon]$ défini par $x_i(T_j) = \delta_{i,j}$. En tant que morphisme $t_F^r \to t_F$, $F(x_i)$ est égal à la projection sur la i-ième coordonnée ; appliqué à ξ_2, il renvoie donc $t_i^* \in t_F$. Il est aisé de vérifier que $(x_i)_{1 \leq i \leq r}$ est une base de t_{R_2}. Puisque φ_2 envoie une base de t_{R_2} sur une base de t_F, c'est un isomorphisme $t_{R_2} \simeq t_F$.

À présent, nous allons définir par récurrence deux suites (J_q) et (ξ_q), avec J_q un idéal de S et $\xi_q \in F(S/J_q)$. Pour J_2, on prend $(p) + \mathfrak{m}_S^2$, et on définit ξ_2 comme ci-dessus. En supposant J_q et ξ_q construits, on demande à J_{q+1} de vérifier les propriétés suivantes :

- $\mathfrak{m}_S J_q \subseteq J_{q+1} \subseteq J_q$;
- Il existe $\xi_q' \in F(S/J_{q+1})$ d'image ξ_q dans $F(S/J_q)$;
- J_{q+1} est minimal parmi les idéaux satisfaisant les deux propriétés ci-dessus.

Soit $\mathcal{S}_{q+1}$ l'ensemble des idéaux qui vérifient les deux premières propriétés. Déjà, $J_q \in \mathcal{S}_{q+1}$, donc l'ensemble $\mathcal{S}_{q+1}$ est non vide et il ne reste qu'à montrer qu'il possède un élément minimal pour l'inclusion. Pour cela, on montre que $\mathcal{S}_{q+1}$ est stable par intersection. Pour la première propriété, c'est clair ; on se concentre donc sur la seconde.

On va décrire une correspondance injective entre $\mathcal{S}_{q+1}$ et certains sous-k-espaces-vectoriels de $J_q/\mathfrak{m}_S J_q$. Soit $J \in \mathcal{S}_{q+1}$. Alors on peut lui associer $J' := J/\mathfrak{m}_S J_q$ qui est un sous-espace vectoriel de $J_q/\mathfrak{m}_S J_q$. Supposons qu'un autre idéal $\widetilde{J} \in \mathcal{S}_{q+1}$ ait le même sous-espace $\widetilde{J}'$ associé. Alors, pour tout $x \in J$, il existe un élément $y \in \widetilde{J}$ tel $x - y \in \mathfrak{m}_S J_q$; mais alors, $x - y \in \widetilde{J}$ d'où $x = y + (x - y) \in \widetilde{J}$; ainsi, on a $J \subseteq \widetilde{J}$, et symétriquement $\widetilde{J} \subseteq J$, et donc $J = \widetilde{J}$. Nous avons montré que l'application $J \mapsto J'$ est injective.

Puisque $J_q/\mathfrak{m}_S J_q$ est un quotient du S-module J_q de dimension finie (car S est nœthérien), c'est un k-espace vectoriel de dimension finie. En particulier, toute intersection de sous-espaces vectoriels de $J_q/\mathfrak{m}_S J_q$ est intersection d'un nombre fini de ces sous-espaces vectoriels. Étant donné la correspondance entre éléments de $\mathcal{S}_{q+1}$ et sous-espaces de $J_q/\mathfrak{m}_S J_q$, cela montre qu'il suffit de montrer que $\mathcal{S}_{q+1}$ est stable par intersection deux à deux pour montrer qu'il est stable par intersection.

Soit donc $J, K \in \mathcal{S}_{q+1}$. On choisit une base du k-espace vectoriel $J_q/\mathfrak{m}_S J_q$, de la forme :

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_{J' \cap K'} \sqcup \mathcal{B}_{J' \text{ manquants}} \sqcup \mathcal{B}_{K' \text{ manquants}} \sqcup \mathcal{B}_{\text{manquants}}$$

en choisissant d'abord une base de $(J' \cap K')/\mathfrak{m}_S J_q$, puis en la complétant itérativement afin d'obtenir une base de $J'/\mathfrak{m}_S J_q$, puis une base de $(J' \oplus K')/\mathfrak{m}_S J_q$, et enfin une base de $J_q/\mathfrak{m}_S J_q$ tout entier. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\mathcal{B}_{\text{manquants}}$ est vide : si besoin, on agrandit l'idéal J pour y inclure les éléments projetés sur $\mathcal{B}_{\text{manquants}}$; on a toujours $J \in \mathcal{S}_{q+1}$ et l'intersection $J \cap K$ n'a pas changé, mais on a maintenant $J + K = J_q$. Par théorème des restes chinois, il vient alors :

$$S/(J \cap K) \simeq S/J \times_{S/J_q} S/K.$$

Par hypothèse (définition de $\mathcal{S}_{q+1}$), il existe des relèvements de $\xi_q \in F(S/J_q)$ dans les ensembles $F(S/J)$ et $F(S/K)$. L'hypothèse (i) du critère de Schlessinger entraîne l'existence d'une surjection :

$$F(S/(J \cap K)) \simeq F(S/J \times_{S/J_q} S/K) \twoheadrightarrow F(S/J) \times_{F(S/J_q)} F(S/K)$$

et donc d'un relèvement de ξ_q dans $F(S/(J \cap K))$. Ainsi, $J \cap K \in \mathcal{S}_{q+1}$.

On a montré qu'on pouvait effectivement définir un idéal $J_{q+1} \in \mathcal{S}_{q+1}$, minimal dans $\mathcal{S}_{q+1}$, en définissant :

$$J_{q+1} = \bigcap_{J \in \mathcal{S}_{q+1}} J$$

et on désigne alors par ξ_{q+1} un relèvement de ξ_q dans $F(S/J_{q+1})$, l'existence d'un tel relèvement étant assurée par définition de $\mathcal{S}_{q+1}$.

Finalement, on définit l'idéal J :

$$J = \bigcap_{q \geq 2} J_q$$

puis l'anneau $R = S/J$. Une récurrence immédiate (voir les définitions de J_2 et de $\mathcal{S}_{q+1}$) montre que $\mathfrak{m}_S^q \subseteq J_q$, pour tout $q \geq 2$. Ainsi, la suite des projections des ξ_q dans R converge vers un élément $\xi \in F(R)$. On va montrer que R est une enveloppe de F.

Pourquoi R est-il une enveloppe ? Commençons à remarquer que, par construction, on a à chaque étape un isomorphisme $t_{S/J_q} \simeq t_F$, de sorte que $t_R \simeq t_F$.

Soit $A \in \mathcal{C}^0$ un anneau de coefficients artinien. Étant donné un morphisme $R \to A$, on obtient par fonctorialité une application $F(R) \to F(A)$ qu'on peut évaluer en $\xi \in F(R)$ pour obtenir un élément de $F(A)$. Cette opération définit une transformation naturelle :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(R, -) \to F$$

dont on doit montrer qu'elle est formellement lisse. Soit une surjection $p \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$, qu'on suppose sans perte de généralité être une petite extension. On se pose alors la question de la surjectivité de l'application :

$$\mathrm{Hom}(R, B) \to \mathrm{Hom}(R, A) \times_{F(A)} F(B).$$

Soit un morphisme $\varphi : R \to A$ et un élément $x \in F(B)$, dont les images dans $F(A)$ sont un même élément qu'on nomme a :

$$a = F(\varphi)(\xi) = F(p)(x).$$

Puisque A est artinien, il existe un entier q tel que $\mathfrak{m}_A^q = 0$, et alors $\varphi(\mathfrak{m}_S^q) = 0$. Puisque $\mathfrak{m}_S^q \subseteq J_q$, le morphisme φ se factorise par S/J_q. On désignera toujours par φ le morphisme $S/J_q \to A$ associé. Notre approche va être de compléter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} S/J_{q+1} \arrow[r, dashed, "\exists\,?"] \arrow[d, two heads] & B \arrow[d, two heads, "p"] \\ S/J_q \arrow[r, "\varphi"] & A \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

S'il est possible, pour tout $q \geq 2$, de définir le morphisme $\varphi_2 : S/J_{q+1} \to B$ en pointillés de sorte que le carré soit commutatif, alors on obtient par « passage à la limite » un morphisme $\varphi_2 : R \to B$ dont l'image dans $\mathrm{Hom}(R, A)$ est effectivement φ, mais qui n'a pas nécessairement la bonne image (à savoir x) dans $F(B)$. On va commencer par voir pourquoi cela n'est pas un problème.

Posons $I = \ker(p)$. Puisque p est une petite extension, on sait que $\mathfrak{m}_B I = 0$. Il y a un isomorphisme de k-algèbres $B \times_A B \simeq B \times_k k[I]$ donné par $(x, y) \mapsto (x, \overline{x} + y - x)$. En effet :

— $\overline{x} \in k$, et $y - x$ est dans I car d'image nulle par p. Ainsi, $\overline{x} + y - x$ est bien dans $k[I]$;

— L'additivité est claire. La multiplicativité s'observe de la façon suivante : l'image de (xx', yy') est $(xx', \overline{xx}' + yy' - xx')$, et on a bien :

$$\begin{aligned}
(\overline{x} + y - x)(\overline{x}' + y' - x') &= \overline{xx}' + \overline{x}'(y - x) + \overline{x}(y' - x') + (y - x)(y' - x') \\
&= \overline{xx}' + (x' + \overline{x}' - x')(y - x) + (x + \overline{x} - x)(y' - x') + (y - x)(y' - x') \\
&= \overline{xx}' + x'(y - x) + x(y' - x') + (y - x)(y' - x') \\
&\quad + \underbrace{(\overline{x}' - x')}_{\in \mathfrak{m}_B}\underbrace{(y - x)}_{\in I} + \underbrace{(\overline{x} - x)}_{\in \mathfrak{m}_B}\underbrace{(y' - x')}_{\in I} \\
&= \overline{xx}' + yy' - xx' \ ;
\end{aligned}$$

— $(x, \delta) \mapsto (x, x - \overline{x} + \delta)$ est une application réciproque.

Ainsi, en utilisant l'hypothèse (ii) du critère de Schlessinger et le lemme 3.12, on obtient :

$$F(B \times_A B) \simeq F(B \times_k k[I]) \simeq F(B) \times F(k[I]) = F(B) \times (t_F \otimes I)$$

d'où un morphisme :

$$F(B) \times (t_F \otimes I) \to F(B) \times_{F(A)} F(B)$$

qui est surjectif d'après l'hypothèse (i). On peut reformuler cela en disant que $t_F \otimes I$ agit transitivement sur l'ensemble $F(p)^{-1}(a)$. De la même manière, on définit une action de $t_F \otimes I$ sur $\mathrm{Hom}(S/J_{q+1}, -)(p)^{-1}(\varphi)$, qui est reliée à l'action définie précédemment via la transformation naturelle $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S/J_{q+1}, -) \to F$.

Supposons à nouveau qu'on dispose d'un morphisme φ_2 faisant commuter le carré commutatif 3.1, et soit x' l'image dans $F(B)$ de ce morphisme. Par transitivité de l'action de $t_F \otimes I$ sur $F(p)^{-1}(a)$, il existe un élément $\sigma \in t_F \otimes I$ qui envoie x' sur x. Soit alors $\sigma.\varphi_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S/J_{q+1}, B)$

le morphisme obtenu en laissant agir σ sur $\varphi_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S/J_{q+1}, B)$. Le morphisme $\sigma.\varphi_2$ s'insère toujours dans le carré commutatif 3.1, mais il a de plus effectivement x comme image dans $F(B)$ puisque $\sigma.x' = x$. Le morphisme $\sigma.\varphi_2 \in \mathrm{Hom}(R, B)$ est donc bien un antécédent du couple $(\varphi, x) \in \mathrm{Hom}(R, A) \times_{F(A)} F(B)$.

Il ne nous reste plus qu'à montrer l'existence d'un morphisme $\varphi_2 \ : S/J_{q+1} \to B$ faisant commuter le diagramme 3.1. Pour cela, on distingue deux cas :

— Supposons qu'il existe un morphisme $f \ : S/J_q \to S/J_q \times_A B$ tel que $\mathrm{pr}_1 \circ f = \mathrm{id}_{S/J_q}$. Quitte à composer le morphisme $\mathrm{pr}_2 \circ f : S/J_q \to B$ avec la projection canonique $S/J_{q+1} \twoheadrightarrow S/J_q$ dans B, on a un morphisme $\varphi_2 : S/J_{q+1} \to B$ comme souhaité.

— Supposons le contraire. Alors la petite extension $\mathrm{pr}_1 \ : S/J_q \times_A B \to S/J_q$ n'admet pas de section. D'après le lemme 3.24, elle est donc essentielle.

On rappelle que S est défini comme $W(k)[\![T_1, \ldots, T_r]\!]$. Pour tout i, soit $x_i \in B$ un antécédent par $p \ : B \to A$ de l'image du générateur T_i dans A (par $S \to S/J_q \xrightarrow{\varphi} A$). Soit $\widetilde{w}$ le morphisme $\begin{cases} S & \to & B \\ T_i & \mapsto & x_i \end{cases}$. Par construction, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\widetilde{w}"] \arrow[d] & B \arrow[d, "p"] \\ S/J_q \arrow[r, "\varphi"] & A \end{tikzcd}$$

Cela donne donc lieu à un morphisme $w \ : S \to S/J_q \times_A B$ s'insérant dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "w"] \arrow[d, two heads] & S/J_q \times_A B \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\ S/J_{q+1} \arrow[r, two heads] \arrow[ur, dashed, "\exists ?"] & S/J_q \end{tikzcd}$$

Il ne nous reste plus qu'à montrer que la flèche en pointillés existe. En effet, s'il existe un morphisme $\widetilde{\varphi_2} : S/J_{q+1} \to S/J_q \times_A B$ faisant commuter le diagramme, alors le morphisme $\mathrm{pr}_2 \circ \widetilde{\varphi_2}$ sera un morphisme φ_2 comme souhaité. De plus, d'après la propriété universelle du quotient, il suffit pour montrer que la flèche en pointillés existe de montrer que le noyau de w contient J_{q+1}. Par définition de J_{q+1}, il suffit pour cela de montrer que $\ker(w) \in \mathcal{S}_{q+1}$.

D'abord, il est clair que $\ker(w) \subseteq J_q$, puisque J_q est le noyau de $S \to S/J_q$. De plus, si $x \in \mathfrak{m}_S J_q$, son image dans B appartient à $\mathfrak{m}_B^{q+1}$ et est donc nulle (car $B \to A$ est une petite extension et que $\mathfrak{m}_A^q = 0$), et son image dans S/J_q est bien sûr nulle. On a donc effectivement $\mathfrak{m}_S J_q \subseteq \ker(w) \subseteq J_q$.

Reste à vérifier qu'il existe un antécédent de ξ_q dans $F(S/\ker(w))$. Comme vu plus haut, la première projection pr_1 est une surjection essentielle (Définition 3.22). Puisque la projection $\mathrm{pr}_1 \circ w \ : S \to S/J_q$ est surjective, le morphisme w est alors surjectif. Ainsi, $S/\ker(w) \simeq B \times_A S/J_q$. On cherche donc à montrer qu'il existe un antécédent de $\xi_q \in F(S/J_q)$ dans $F(B \times_A S/J_q)$. Or, d'après l'hypothèse (i), le morphisme $F(B \times_A S/J_q) \to F(B) \times_A F(S/J_q)$ est surjectif. Cela conclut la preuve.

Chapitre 4

Anneaux de déformations

Dans ce chapitre, on fixe une représentation résiduelle $\overline{\rho} : G \to \mathrm{GL}_n(k)$, et on s'occupe de la question de savoir si le foncteur $D_{\overline{\rho}}$ (cf. Définition 2.13) est représentable par un anneau de coefficients $\mathfrak{R}_{\overline{\rho}}$, c'est-à-dire s'il est isomorphe (via une transformation naturelle inversible) au foncteur $h_{\mathfrak{R}_{\overline{\rho}}} = \mathrm{Hom}(\mathfrak{R}_{\overline{\rho}}, -)$. Lorsqu'un tel anneau existe, on dit que $\mathfrak{R}_{\overline{\rho}}$ est un *anneau de déformation universel.*

Afin de motiver cette question, réfléchissons aux conséquences d'une réponse positive. S'il existe, l'anneau de déformation universel contient des informations précieuses sur les déformations de la représentation résiduelle $\overline{\rho}$. En particulier, le morphisme $\mathrm{id}_{\mathfrak{R}_{\overline{\rho}}}$ correspond à une déformation $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(\mathfrak{R}_{\overline{\rho}})$ (définie à équivalence stricte près) qui est *universelle*, au sens où chaque déformation ρ' de $\overline{\rho}$ à A correspond à un *unique* morphisme $\varphi : \mathfrak{R}_{\overline{\rho}} \to A$ satisfaisant $\rho' = \mathrm{GL}_n(\varphi) \circ \rho$. Autrement dit, la connaissance de $\mathfrak{R}_{\overline{\rho}}$ et de ρ permet de paramétrer toutes les déformations de $\overline{\rho}$. On peut aussi présenter les choses en disant qu'un anneau universel de déformation est en quelque sorte un espace de paramètres (ou « espace de modules ») permettant d'explorer « continûment » l'ensemble des déformations, et donc typiquement d'établir des propriétés des représentations galoisiennes en étudiant la structure de cet espace.

Cela dit, le foncteur des déformations n'est généralement pas représentable. Cependant, nous allons identifier des conditions suffisantes pour qu'un représentant existe, et construire dans tous les cas une « bonne approximation » d'un représentant de ce foncteur.

4.1 Existence d'un anneau de déformation

4.1.1 Énoncé et démonstration

Le critère de Schlessinger (Théorème 3.20) est un outil précieux étudier la question de la pro-représentabilité du foncteur des déformations ou, à défaut, de l'existence d'une enveloppe. Le but de cette section est de l'appliquer afin de démontrer le théorème suivant, dû à Mazur, qui résout la question de l'existence des déformations universelles :

Théorème 4.1. *Soit G un groupe profini satisfaisant la condition Φ_p, et soit $\overline{\rho}$ une représentation $G \to \mathrm{GL}_n(k)$. Alors :*

— *le foncteur des déformations $D_{\overline{\rho}}$ admet une enveloppe ;*

— *si la représentation $\overline{\rho}$ est absolument irréductible, le foncteur des déformations $D_{\overline{\rho}}$ est pro-représentable.*

Bien qu'on énonce le théorème 4.1 pour un groupe profini quelconque satisfaisant la condition Φ_p, il est taillé sur mesure pour s'appliquer au cas des groupes G_K et $G_{K,S}$. Pour en savoir plus sur les motivations de Mazur, on peut consulter [Maz97, p. 259]. La démonstration ci-dessous suit celle de [Maz89, pp. 388-391], qui est aussi celle de [Lac16].

Démonstration. Afin d'appliquer le théorème 3.20, on en vérifie les hypothèses. D'abord, remarquons que $D_{\overline{\rho}}(k)$ ne contient qu'un élément : la représentation résiduelle, ou plutôt sa classe d'équivalence stricte (qui ne contient qu'elle). Soit des anneaux $A_0, A_1, A_2 \in \mathcal{C}^0$ et des morphismes $\alpha_1 : A_1 \to A_0$ et $\alpha_2 : A_2 \to A_0$, et soit $A_3 = A_1 \underset{A_0}{\times} A_2$. On note β_1 (resp. β_2) la projection canonique $A_3 \to A_1$ (resp. $A_3 \to A_2$). On récapitule cela par un diagramme :

$$\begin{tikzcd} A_3 \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "\beta_2"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & A_1 \arrow[d, "\alpha_1"] \\ A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] & A_0 \end{tikzcd}$$

Pour $i \in \{0,1,2,3\}$, on définit l'ensemble suivant :

$$E_i = \left\{ \rho \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^0}(G, \mathrm{GL}_n(A_i)) \;\middle|\; \begin{tikzcd} & \mathrm{GL}_n(A_i) \arrow[d] \\ G \arrow[ur, "\rho"] \arrow[r, "\overline{\rho}"] & \mathrm{GL}_n(k) \end{tikzcd} \right\}.$$

On pose également $G_i = \ker\big(\mathrm{GL}_n(A_i) \to \mathrm{GL}_n(k)\big)$, de sorte que $D(A_i) = E_i/G_i$ où G_i agit par conjugaison sur E_i. Pour vérifier les hypothèses du théorème 3.20, on doit vérifier la surjectivité ou la bijectivité, sous diverses hypothèses, de l'application suivante :

$$\varphi \; : E_3/G_3 \to E_1/G_1 \underset{E_0/G_0}{\times} E_2/G_2.$$

Si $i \in \{1,2,3\}$ et $\rho \in E_i$, on définit $G_i(\rho) = \{M \in G_i \mid M\rho = \rho M\}$. Si $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(A)$ est une représentation et $u : A \to B$ est un morphisme d'anneaux, on écrira $u(\rho)$ pour désigner la représentation $\mathrm{GL}_n(u) \circ \rho : G \to \mathrm{GL}_n(B)$. Le lemme suivant nous sera utile :

Lemme 4.2. *Si l'application $G_2(\rho) \to G_0(\alpha_2(\rho))$ est surjective quel que soit $\rho \in E_2$, alors le morphisme φ est injectif.*

Démonstration. Soit $\rho_3, \rho_3' \in E_3$ tels que $\varphi([\rho_3]) = \varphi([\rho_3'])$. On pose $\rho_1 = \beta_1(\rho_3)$, $\rho_2 = \beta_2(\rho_3)$. On note $\rho_0 = \alpha_1(\rho_1) = \alpha_2(\rho_2)$ et $\rho_0' = \alpha_1(\beta_1(\rho_3')) = \alpha_2(\beta_2(\rho_3'))$. Puisque $\varphi([\rho_3]) = \varphi([\rho_3'])$, il existe $M_1 \in G_1$ (resp. $M_2 \in G_2$) telle que $\beta_1(\rho_3')M_1 = M_1\rho_1$ (resp. $\beta_2(\rho_3')M_2 = M_2\rho_2$). Soit $N_1 = \alpha_1(M_1) \in G_0$ et $N_2 = \alpha_2(M_2) \in G_0$. On a :

$$\begin{aligned} \rho_0' &= \alpha_1(\beta_1(\rho_3')) = N_1\alpha_1(\rho_1)N_1^{-1} = N_1\rho_0N_1^{-1} \\ &= \alpha_2(\beta_2(\rho_3')) = N_2\alpha_2(\rho_2)N_2^{-1} = N_2\rho_0N_2^{-1}, \end{aligned}$$

et donc $N_2^{-1}N_1 \in G_0$ commute avec ρ_0, autrement dit $N_2^{-1}N_1 \in G_0(\rho_0)$. Par hypothèse, il existe $P \in G_2(\rho_2)$ tel que $\alpha_2(P) = N_2^{-1}N_1$. Puisque $\alpha_2(M_2P) = N_2N_2^{-1}N_1 = N_1 = \alpha_1(M_1)$, le couple (M_1, M_2P) définit un élément M_3 de $G_3 = G_1 \underset{G_0}{\times} G_2$. On vérifie alors que $M_3\rho_3M_3^{-1} = \rho_3'$: d'une part, $M_1\rho_1M_1^{-1} = \rho_1'$, et d'autre part $M_2P\rho_2P^{-1}M_2^{-1} = M_2\rho_2PP^{-1}M_2^{-1} = M_2\rho_2M_2^{-1} = \rho_2'$. On a donc démontré l'égalité $[\rho_3] = [\rho_3']$ dans E_3/G_3. Cela démontre l'injectivité de φ. $\square$

On vérifie à présent les hypothèses du critère de Schlessinger :

— **Première étape :** On suppose que $\alpha_2 \ : A_2 \twoheadrightarrow A_0$ soit une petite extension, et on cherche à montrer que φ est surjectif.

Soit un élément de $E_1/G_1 \underset{E_0/G_0}{\times} E_2/G_2$, on peut l'écrire comme un couple $([\rho_1], [\rho_2])$ avec $\rho_1 \in E_1$ et $\rho_2 \in E_2$. Les représentations $\alpha_1(\rho_1) \in E_0$ et $\alpha_2(\rho_2) \in E_0$ correspondent alors à la même déformation de $\overline{\rho}$ à A_0, et sont donc conjuguées par une matrice $M \in G_0$:

$$\alpha_1(\rho_1)M = M\alpha_2(\rho_2)$$

Soit $M_2 \in \mathfrak{M}_n(A_2)$ une matrice dont les coefficients sont des antécédents arbitraires des coefficients de M par α_2, ce qu'on peut faire puisque α_2 est surjectif. Soit de même une matrice $M_2^\Delta \in \mathfrak{M}_n(A_2)$ dont la projection dans $\mathfrak{M}_n(A_0)$ est M^{-1}. On pose $N = M_2M_2^\Delta - I_n$. Par construction, $\alpha_2(N) = MM^{-1} - I_n = 0$, ce qui signifie que N a ses coefficients dans l'idéal $\ker(\alpha_2)$ de A_2.

Notons $\mathfrak{m}_2$ l'idéal maximal de A_2. Puisque α_2 est une petite extension, on a $\ker(\alpha_2) = (t)$ avec $t \neq 0$ et $\mathfrak{m}_2 t = 0$. Ainsi, $N = tN'$ pour une certaine matrice $N' \in \mathfrak{M}_n(A_2)$. Puisque $t^2 = 0$, la matrice $I_n + tN'$ est inversible d'inverse $M_2^\Xi = I^n - tN'$. On a alors :

$$M_2M_2^\Delta M_2^\Xi = (I_n + tN')(I_n + tN')^{-1} = I_n$$

et donc $M_2^\Delta M_2^\Xi$ est un inverse de M_2, d'où $M_2 \in \mathrm{GL}_n(A_2)$. Par définition de G_0, l'image de M dans $\mathrm{GL}_n(k)$ est égale à I_n, et il en va donc de même de M_2. On a donc $M_2 \in G_2$. De plus :

$$\begin{aligned}\alpha_1(\rho_1) &= M\alpha_2(\rho_2)M^{-1}\\ &= \alpha_2(M_2)\alpha_2(\rho_2)\alpha_2(M_2)^{-1}\\ &= \alpha_2(M_2\rho_2M_2^{-1})\end{aligned}$$

et donc $(\rho_1, M_2\rho_2M_2^{-1})$ définit bien un élément ρ_3 de $E_1 \underset{E_0}{\times} E_2 = E_3$. La classe $[\rho_3]$ de ρ_3 dans E_3/G_3 donne un antécédent de $([\rho_1], [\rho_2])$ par φ, qui est donc bien surjectif.

— **Deuxième étape :** On suppose que $A_0 = k$ et $A_2 = k[\varepsilon]$, et on cherche à montrer que φ est bijectif.

Déjà, puisque $k[\varepsilon] \twoheadrightarrow k$ est une petite extension (c'est un morphisme surjectif de noyau (ε), et $\varepsilon^2 = 0$), la première étape entraîne que φ est surjectif.

Il reste à montrer que φ est injectif. Pour cela, on se ramène au lemme 4.2 : il suffit de montrer que pour tout morphisme $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(k[\varepsilon])$, et pour toute matrice $M_0 \in G_0$ qui commute avec $\rho \mod \varepsilon$, il existe une matrice $M_2 \in G_2$ qui commute avec ρ et dont la réduction modulo ε est M_0. Cependant, ici, $G_0 = \ker(\mathrm{GL}_n(k) \to \mathrm{GL}_n(k))$ est le singleton $\{I_n\}$, et donc la matrice $M_2 = I_n \in G_2$ conviendra toujours.

— **Troisième étape :** On souhaite montrer que $t_D := D_{\overline{\rho}}(k[\varepsilon])$ est de dimension finie. Cela repose principalement sur la condition Φ_p et sur le lemme suivant (qui établit un premier lien entre cohomologie galoisienne et étude des déformations) :

Lemme 4.3. *On munit $\mathfrak{M}_n(k)$ de l'action de G définie par la formule $g.M = \overline{\rho}(g)M\overline{\rho}(g)^{-1}$. Alors, il existe un isomorphisme entre l'espace tangent t_D et le premier groupe de cohomologie du $\mathbb{Z}[G]$-module $\mathfrak{M}_n(k)$:*

$$t_D \simeq H^1(G, \mathfrak{M}_n(k)).$$

(pour une introduction rapide à la cohomologie des groupes, voir [AW67])

Démonstration. Soit un relèvement $\rho\ : G \to \mathrm{GL}_n(k[\varepsilon])$ de $\overline{\rho}$ à $k[\varepsilon]$. Alors, pour tout $g \in G$, on a : $\rho(g) = [I_n + \varepsilon u(g)]\overline{\rho}(g)$ pour une certaine matrice $u \in \mathfrak{M}_n(k)$.
Montrons que l'application $u\ : G \to \mathfrak{M}_n(k)$ est un cocycle :

$$\begin{aligned} \rho(gg') &= [\overline{\rho}(g) + \varepsilon u(g)\overline{\rho}(g)][\overline{\rho}(g') + \varepsilon u(g')\overline{\rho}(g')] \\ &= \overline{\rho}(gg') + \varepsilon[u(g)\overline{\rho}(gg') + \overline{\rho}(g)u(g')\overline{\rho}(g')] \\ &= [I_n + \varepsilon(u(g) + \overline{\rho}(g)u(g')\overline{\rho}(g)^{-1})]\overline{\rho}(gg') \end{aligned}$$

Cela montre que $u(gg') = u(g) + g.u(g')$, donc u est un cocycle.
De plus, un élément $\ell \in \Gamma_n(k[\varepsilon])$ se met sous la forme $I_n + \varepsilon M$ avec $M \in \mathfrak{M}_n(k)$, et l'effet de son action par conjugaison sur ρ s'écrit, en termes de u :

$$\begin{aligned} \ell\rho(g)\ell^{-1} &= \ell\overline{\rho}(g)\ell^{-1} + \varepsilon\ell u(g)\overline{\rho}(g)\ell^{-1} \\ &= \overline{\rho}(g) + \varepsilon(M\overline{\rho}(g) - \overline{\rho}(g)M) + \varepsilon u(g)\overline{\rho}(g) + \cancel{\varepsilon^2(\dots)} \\ &= \left[I_n + \varepsilon\left(M - \overline{\rho}(g)M\overline{\rho}(g)^{-1} + u(g)\right)\right]\overline{\rho}(g) \\ &= \left[I_n + \varepsilon\left(M - \overline{\rho}(g).M + u(g)\right)\right]\overline{\rho}(g) \end{aligned}$$

Donc le u associé à $\ell\rho(g)\ell^{-1}$ est égal au u associé à ρ, auquel on ajoute $M - \overline{\rho}(g).M$: la conjugaison par des éléments de $\Gamma_n(k[\varepsilon])$ correspond donc bien à l'addition de cobords.
Les mêmes calculs (essentiellement, menés dans l'autre sens) montrent que, réciproquement, un cobord correspond à un élément de $\Gamma_n(k[\varepsilon])$, et qu'un cocycle correspond à un relèvement $G \to \mathrm{GL}_n(k[\varepsilon])$ de $\overline{\rho}$. Puisque $t_D = D_{\overline{\rho}}(k[\varepsilon])$ est le quotient de l'ensemble des relèvements de $\overline{\rho}$ à $k[\varepsilon]$ par l'action de $\Gamma_n(k[\varepsilon])$, il est isomorphe au quotient des 1-cocyles par les 1-cobords, c'est-à-dire que :

$$t_{\overline{\rho}} \simeq H^1(G, \mathfrak{M}_n(k)).$$

En outre, on vérifie facilement que la structure d'espace vectoriel obtenue est la même. □

Ainsi, il ne nous reste plus qu'à montrer que $H^1(G, \mathfrak{M}_n(k))$ est de dimension finie sur k. Pour cela, on pose $G_0 \overset{\text{déf}}{=} \ker\overline{\rho}$, qui est un sous-groupe ouvert d'indice fini de G. On a la suite exacte de restriction-inflation :

$$0 \longrightarrow H^1(G/G_0, \mathfrak{M}_n(k)^{G_0}) \xrightarrow{\text{Inf}} H^1(G, \mathfrak{M}_n(k)) \xrightarrow{\text{Res}} H^1(G_0, \mathfrak{M}_n(k))$$

Par définition de G_0 (comme noyau de $\overline{\rho}$), l'action de G_0 sur $\mathfrak{M}_n(k)$ est triviale, et donc :

$$H^1(G_0, \mathfrak{M}_n(k)) \simeq \mathrm{Hom}(G_0, \mathfrak{M}_n(k)) \simeq \mathrm{Hom}(G_0, k)^{n^2}$$

$$H^1(G/G_0, \mathfrak{M}_n(k)^{G_0}) \simeq H^1(G/G_0, \mathfrak{M}_n(k))$$

Puisque G vérifie la condition Φ_p, l'ensemble $\mathrm{Hom}(G_0, \mathbb{F}_p)$ est fini, et donc le k-espace vectoriel $H^1(G_0, \mathfrak{M}_n(k))$ est de dimension finie. Puisque G est compact (car profini), son sous-groupe ouvert G_0 est d'indice fini. Ainsi, le quotient G/G_0 est un groupe fini, et donc $H^1(G/G_0, \mathfrak{M}_n(k))$ est de dimension finie sur k. De la suite exacte ci-dessus, on déduit alors que $H^1(G, \mathfrak{M}_n(k))$ est de dimension finie sur k.

— **Quatrième étape :** On suppose que $\overline{\rho}$ est absolument irréductible, que $A_1 = A_2$ et que $\alpha_2 \ : A_2 \twoheadrightarrow A_0$ est une petite extension, et on cherche à montrer que φ est un isomorphisme. Puisque la première étape entraîne la surjectivité de φ, il ne reste qu'à montrer son injectivité. Là encore, on se ramène au lemme 4.2.

Pour un anneau $A \in \mathcal{C}^0$ et une représentation $\rho_A \ : G \to \mathrm{GL}_n(A)$, notons $C_A(\rho_A)$ l'ensemble des matrices de $\mathfrak{M}_n(A)$ commutant avec $\rho_A(g)$ pour tout $g \in G$. On va montrer que $C_A(\rho_A) \simeq A$, c'est-à-dire que toutes ces matrices sont scalaires. On démontre pour cela deux lemmes :

Lemme 4.4. *On a $C_k(\overline{\rho}) = k$.*

Démonstration. Il s'agit d'une forme du lemme de Schur. Détaillons : soit une matrice $P \in C_k(\overline{\rho})$ commutant avec $\overline{\rho}(g)$ pour tout $g \in G$. Sur $\overline{k}$, la matrice P a une valeur propre $\lambda \in \overline{k}$. On pose $Q = P - \lambda I_n \in \mathfrak{M}_n(\overline{k})$, de sorte que $\ker(Q) \neq 0$. Soit $g \in G$. Les matrices Q et $\overline{\rho}(g)$ commutent, et donc le $\overline{k}$-espace vectoriel $\ker(Q)$ est stable par $\overline{\rho}(g)$. Puisque $\overline{\rho}$ est absolument irréductible, cela entraîne $\ker(Q) = \overline{k}^n$. On a alors $Q = 0$ et finalement $P = \lambda I_n$ avec $\lambda \in k$. □

(En fait, la conclusion du lemme 4.4, plus faible que l'absolue irréductibilité, suffit à achever la démonstration : elle fournit une condition suffisante pour l'existence d'une déformation universelle.)

Lemme 4.5. *Si $B \twoheadrightarrow A$ est une petite extension, si $\rho_B : G \to \mathrm{GL}_n(B)$ est une représentation relevant $\rho_A : G \to \mathrm{GL}_n(A)$, et si $C_A(\rho_A) \simeq A$, alors $C_B(\rho_B) \simeq \ B$.*

Démonstration. Puisque $B \twoheadrightarrow A$ est une petite extension, son noyau $\ker(B \to A)$ est engendré par un élément t satisfaisant $t\mathfrak{m}_B = 0$, où $\mathfrak{m}_B$ est l'idéal maximal de B.

Soit $M_B \in C_B(\rho_B)$, et soit M_A la matrice image de M_B par $B \to A$. Par hypothèse, puisque $M_A \in C_A(\rho_A)$, on a $M_A = \lambda I_n$ pour un certain $\lambda \in A$. Soit $\widetilde{\lambda}$ un antécédent quelconque de λ par la surjection $B \twoheadrightarrow A$, et $N_B = M_B - \widetilde{\lambda} I_n$. La matrice N_B a ses coefficients dans $\ker(B \to A) = (t)$ et on peut donc écrire $N_B = tN'_B$. La matrice N'_B est dans $C_B(\rho_B)$, et son image dans $\mathfrak{M}_n(k)$ est donc (puisque $C_k(\overline{\rho}) = k$) de la forme aI_n avec $a \in k$. Choisissons un relèvement $\widetilde{a} \in B$ de a. La matrice $U \overset{\text{déf}}{=} N'_B - \widetilde{a} I_n$ est à coefficients dans $\mathfrak{m}_B$, et donc $tU = 0$. Mais alors :

$$M_B = \widetilde{\lambda} I_n + t(\widetilde{a} I_n + U) = (\widetilde{\lambda} + t\widetilde{a}) I_n + tU = (\widetilde{\lambda} + t\widetilde{a}) I_n$$

est une matrice scalaire. □

Des lemmes 4.4, 4.5 et 3.19, on déduit immédiatement comme annoncé que $C_A(\rho_A) \simeq A$ pour tout $A \in \mathcal{C}$.

Soit une représentation $\rho_2 \in E_2$ d'image $\rho_0 = \alpha_2(x_2) \in E_0$. On a :

$$G_0(\alpha_2(\rho_2)) = G_0(\rho_0) = G_0 \cap C_{A_0}(\rho_0) = G_0 \cap A_0 = 1 + \mathfrak{m}_{A_0}.$$

Une matrice $M_0 \in G_0(\alpha_2(\rho_2))$ est donc nécessairement de la forme $(1+\lambda)I_n$ avec $\lambda \in \mathfrak{m}_{A_0}$. En choisissant un relèvement arbitraire $\widetilde{\lambda} \in A_2$ de λ, la matrice $M_2 = (1+\widetilde{\lambda})I_n$ est alors un antécédent de M_0 pour l'application $G_2(\rho) \to G_0(\alpha_2(\rho))$, qui est ainsi bien surjective. □

Exemple 4.6. Une représentation de dimension 1 (par exemple, le caractère cyclotomique dans le cas des corps p-adiques) est toujours absolument irréductible. Il lui correspond donc toujours un anneau de déformation universel. En fait, cet anneau ne dépend pas de la représentation ; on le calculera dans la section 4.2.

Exemple 4.7. La condition d'absolue irréductibilité n'est pas nécessaire. Par exemple, la représentation triviale $\overline{\rho}_{\text{triv}} : g \in G \mapsto I_n \in \mathrm{GL}_n(k)$ fixe tous les sous-espaces de $\overline{k}^n$ et est donc très loin d'être absolument irréductible dès que $n \geq 2$. Cependant, l'anneau de déformation universel correspondant existe. En effet, dans la preuve du théorème 4.1, on peut systématiquement appliquer le lemme 4.2 puisque les relations de commutation sont toujours trivialement vérifiées ($C_k(\overline{\rho}_{\text{triv}}) = \mathfrak{M}_n(k)$). Avec les notations de la preuve, n'importe quelle matrice M_2 d'image M_0 par α_2 (qui est surjectif) convient pour finir la démonstration.

Une représentation $G \to \mathrm{GL}_n(A)$ induit la représentation triviale dans $\mathrm{GL}_n(k)$ si et seulement si elle est à valeurs dans $\Gamma_n(A)$. On peut donc décrire $D(A)$ comme les classes de $\mathrm{Hom}(G, \Gamma_n(A))$ pour la conjugaison par un élément de $\Gamma_n(A)$. L'anneau de déformation universel associé, lorsque G est le groupe de Galois absolu d'un corps p-adique, est l'objet de conjectures diverses. Voir [Iye19] ou [Con09, Lecture 3].

Ci-dessus, on a préféré la clarté de l'explication à la généralité. Dans la suite de cette section, on présente rapidement deux variantes :

4.1.2 Déformations cadrées

Jusqu'à présent, on a toujours considéré les déformations à équivalence stricte près. Si, à la place, on se concentre sur les relèvements de la représentation résiduelle (les *déformations cadrées*) sans quotienter par la relation d'équivalence stricte, on obtient un foncteur noté $D^{\square}_{\overline{\rho}}$. Dans ce contexte, l'étude des déformations est beaucoup plus simple : l'existence d'une déformation cadrée universelle ne nécessite pas l'hypothèse d'absolue irréductibilité et ne pose aucune difficulté.

4.1.3 Déformations aux Λ-algèbres

Soit $\Lambda \in \mathcal{C}$. On peut décider de ne plus considérer que les anneaux de coefficients qui sont des Λ-algèbres, en définissant des catégories $\mathcal{C}_\Lambda$ et $\mathcal{C}^0_\Lambda$ et un foncteur des déformations $D_{\overline{\rho},\Lambda}$. On retrouve alors sans grand changement les résultats précédents, qui correspondent au cas $\Lambda = W(k)$. Il faut tout de même faire attention à la bonne définition de l'espace cotangent dans ce cas :

$$t^*_A = \mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2 + \mathfrak{m}_\Lambda A.$$

Cette situation plus générale est traitée en détails dans [Gou91 ; Lac16]. Elle est reliée aux résultats précédents par la proposition qui suit :

Proposition 4.8. *Supposons que $\mathfrak{R}$ représente le foncteur des déformations D. Alors D_Λ est représenté par le produit tensoriel complété de $\mathfrak{R}$ et Λ comme $W(k)$-algèbres, c'est-à-dire :*

$$\mathfrak{R}_\Lambda = \mathfrak{R} \mathop{\widehat{\otimes}}_{W(k)} \Lambda.$$

Démonstration. On pose $\mathfrak{R}_\Lambda := \mathfrak{R} \mathop{\widehat{\otimes}}_{W(k)} \Lambda$. Soit c le morphisme canonique $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}_\Lambda$, et $[\rho_\Lambda]$ la déformation de $\overline{\rho}$ à $\mathfrak{R}_\Lambda$ associée à ce morphisme par l'isomorphisme $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}_\Lambda) \simeq D(\mathfrak{R}_\Lambda)$.

Soit une déformation $[\rho]$ de $\overline{\rho}$ à un anneau $A \in \mathcal{C}_\Lambda$, et soit $\widetilde{\rho}$ le morphisme $\mathfrak{R} \to A$ associé. Puisque A est une Λ-algèbre, par propriété universelle du produit tensoriel, $\widetilde{\rho}$ se factorise par $\mathfrak{R} \otimes_{W(k)} \Lambda$. Autrement dit, il existe un morphisme continu $\widetilde{\rho}'$ entre anneaux locaux de corps résiduel k, induisant l'identité sur les corps résiduels, tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{R} \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\widetilde{\rho}"] \arrow[drr] & \mathfrak{R} \otimes_{W(k)} \Lambda \arrow[r, "\widetilde{\rho}'"'] & A \arrow[d] \\
& & k
\end{tikzcd}$$

Puisque A est complet et que $\widetilde{\rho}'$ est continu, $\widetilde{\rho}'$ se factorise par $\mathfrak{R}_\Lambda$ d'après la propriété universelle de la complétion. Il existe donc un morphisme $\widetilde{\rho}'' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\Lambda}(\mathfrak{R}_\Lambda, A)$ tel que $\widetilde{\rho} = \widetilde{\rho}'' \circ c$. Cela signifie que pour toute déformation $[\rho] \in D_\Lambda(A)$, il existe un unique morphisme $\widetilde{\rho}'' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\Lambda}(\mathfrak{R}_\Lambda, A)$ tel que $\rho = \widetilde{\rho}''_*(\rho_\Lambda)$, où on note $\widetilde{\rho}''_*$ l'application de $\widetilde{\rho}''$ coefficient par coefficient. De plus, pour un $A \in \mathcal{C}$ quelconque, si une déformation $[\rho] \in D(A)$ se met sous la forme $\varphi_*(\rho_\Lambda)$ pour un morphisme $\varphi : \mathfrak{R}_\Lambda \to A$, alors le morphisme φ munit A d'une structure de Λ-algèbre. Ainsi, $[\rho_\Lambda]$ est la déformation universelle associée au foncteur D_Λ, qui est donc représenté par $\mathfrak{R}_\Lambda$. □

4.2 Déformations des représentations unidimensionnelles

Dans cette section, on se concentre sur le cas $n = 1$, c'est-à-dire qu'on fixe une représentation résiduelle $\overline{\rho} : G \to k^\times$. Le cas unidimensionnel est un des rares cas où le calcul explicite de l'anneau de déformation est possible. Par ailleurs, ce cas présente la propriété étonnante que l'anneau de déformation universel ne dépend pas de la représentation résiduelle. Il permet en outre d'illustrer les techniques employées pour décrire des anneaux de déformation.

Remarquons d'abord qu'une représentation de dimension 1 est toujours absolument irréductible. L'anneau de déformation universel existe donc toujours. Notons également que, le groupe $k^\times$ étant commutatif, la relation d'équivalence stricte est triviale dans le cas unidimensionnel : on peut totalement identifier déformations de $\overline{\rho}$ à un anneau de coefficients A et représentations $G \to A^\times$ relevant $\overline{\rho}$ (« déformations cadrées »).

Soit Γ l'abélianisation de la pro-p-complétion de G. Autrement dit :

$$\Gamma = \left(\varprojlim_H G/H \right)^{\mathrm{ab}}$$

où la limite projective porte sur les sous-groupes distingués ouverts de G dont l'indice (fini car G est compact) est une puissance de p. On définit :

$$W(k)[\![\Gamma]\!] = \varprojlim_H W(k)[\Gamma/H]$$

où la limite projective porte sur les sous-groupes distingués ouverts de Γ. On a alors le résultat suivant :

Théorème 4.9. *L'anneau de déformation universel associé à une représentation unidimensionnelle $\overline{\rho} : G \to k^\times$ est $W(k)[\![\Gamma]\!]$.*

Démonstration. Le représentant de Teichmüller permet de définir une déformation canonique de $\overline{\rho}$ à $W(k)$:

$$\rho_0 : \begin{cases} G & \to & W(k)^\times \\ g & \mapsto & [\overline{\rho}(g)] \end{cases}.$$

Soit un anneau de coefficients A. En utilisant la structure de $W(k)$-algèbre de A, on définit une bijection :

$$\begin{array}{rcl} D_{\overline{\rho}}(A) & \simeq & \mathrm{Hom}(G, 1+\mathfrak{m}_A) \\ \rho & \mapsto & \rho_0^{-1}\rho \\ \rho_0\rho' & \leftarrow\!\!\shortmid & \rho' \end{array}$$

La structure du groupe $1+\mathfrak{m}_A$ est bien connue, puisqu'elle peut être décrite explicitement en utilisant le logarithme (cf. [Neu99, Chapitre II, Proposition 5.7]) :

- Si A est de caractéristique nulle, alors $1+\mathfrak{m}_A \simeq \mathbb{Z}/p^a\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_p^d$, où a est un entier positif et $d = [\mathrm{Frac}(A) \ : \mathbb{Q}_p]$.
- Si A est de caractéristique p, alors $1+\mathfrak{m}_A \simeq \mathbb{Z}_p^{\mathbb{N}}$.

En particulier, le groupe $1+\mathfrak{m}_A$ est toujours un pro-p-groupe abélien. Par les propriétés universelles de la pro-p-complétion et de l'abélianisation, un morphisme $G \to 1+\mathfrak{m}_A$ se factorise uniquement à travers l'abélianisation de la pro-p-complétion de G, qu'on a nommée Γ plus haut. Il y a donc une bijection :

$$\mathrm{Hom}(G, 1+\mathfrak{m}_A) \simeq \mathrm{Hom}(\Gamma, 1+\mathfrak{m}_A).$$

Un morphisme $\Gamma \to 1+\mathfrak{m}_A$ induit un morphisme $W(k)[\![\Gamma]\!] \to W(k)[\![1+\mathfrak{m}_A]\!]$. Puisque A est complet, on a $W(k)[\![1+\mathfrak{m}_A]\!] \simeq W(k)[1+\mathfrak{m}_A]$. Par ailleurs, on a $W(k)[1+\mathfrak{m}_A] \simeq A$: il y a un plongement naturel de $W(k)[1+\mathfrak{m}_A]$ dans A, et tout élément $x \in A$ appartient à l'image de ce plongement : si $x \in A$, on note $[\overline{x}] \in W(k)$ le représentant de Teichmüller de la projection de x dans k, et alors $x - [\overline{x}]$ vaut 0 dans k et est donc un élément $m \in \mathfrak{m}_A$. On a ainsi :

$$x = \underbrace{([\overline{x}]-1)}_{\in W(k)}\ (1 + \underbrace{0}_{\in \mathfrak{m}_A}) \ + \ \underbrace{1}_{\in W(k)}\ (1 + \underbrace{m}_{\in \mathfrak{m}_A})$$

et donc toute déformation $\rho : G \to A^\times$ de $\overline{\rho}$ à A correspond à un morphisme $\rho^\circ \ : W(k)[\![\Gamma]\!] \to A$. Réciproquement, étant donné un morphisme $\rho^\circ : W(k)[\![\Gamma]\!] \to A$, on obtient une déformation $\rho : G \to A^\times$ de $\overline{\rho}$ comme composition de la projection $G \to \Gamma$, de l'inclusion canonique $\Gamma \to W(k)[\![\Gamma]\!]^\times$, et enfin de l'application induite par ρ°.

Ainsi, les déformations ρ de $\overline{\rho}$ à A sont uniquement paramétrées par les morphismes $\rho^\circ \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(G,\ W(k)[\![\Gamma]\!])$. L'anneau de déformation universel existe donc, et il s'agit bien de $W(k)[\![\Gamma]\!]$. □

4.3 Description des anneaux de déformations

Dans cette section, on essaie de pousser plus loin les méthodes utilisées ci-dessus pour calculer l'anneau de déformation des représentations unidimensionnelles, en décrivant les anneaux de déformations comme des anneaux de séries formelles sur $W(k)$, avec certaines relations entre les indéterminées (ci-dessus, les relations données par les égalités dans Γ).

Soit une représentation $\overline{\rho} : G \to \mathrm{GL}_n(k)$, dont on suppose qu'elle admet un anneau de déformation universel $\mathfrak{R}$. On notera $[\boldsymbol{\rho}]$ la déformation universelle, où $\boldsymbol{\rho} : G \to \mathrm{GL}_n(\mathfrak{R})$ est un représentant quelconque de la classe d'équivalence stricte $[\boldsymbol{\rho}]$. On cherche à décrire $\mathfrak{R}$ sous la forme suivante (cf. le paragraphe 2.1.3.2) :

$$\mathfrak{R} \simeq W(k)[\![X_1, \ldots, X_d]\!]/I \tag{4.1}$$

où d est un entier, et I est un idéal (nécessairement finiment engendré) de $W(k)[\![X_1, \ldots, X_d]\!]$.

4.3.1 Calcul de la dimension

L'entier d de l'équation (4.1) peut être pris (à nouveau d'après le paragraphe 2.1.3.2) égal au nombre minimal de générateurs de $\mathfrak{m}_{\mathfrak{R}}$, c'est-à-dire à la dimension de l'espace tangent $t_{\mathfrak{R}}$ (ou de l'espace cotangent $t_{\mathfrak{R}}^* = \mathfrak{m}_{\mathfrak{R}}/\mathfrak{m}_{\mathfrak{R}}^2$) comme k-espace vectoriel. On a :

$$\begin{aligned} t_{\mathfrak{R}} &\simeq t_D && \text{par la proposition 3.9} \\ &\simeq H^1(G, \mathfrak{M}_n(k)) && \text{par le lemme 4.3} \end{aligned}$$

où G agit sur $\mathfrak{M}_n(k)$ est donnée par $g.M = \overline{\rho}(g)M\overline{\rho}(g)^{-1}$. On a alors :

$$d = \dim_k(t_{\mathfrak{R}}) = \dim_k\big(H^1(G, \mathfrak{M}_n(k))\big) .$$

4.3.2 Informations cohomologiques

On a vu ci-dessus que le nombre minimal de générateurs topologiques de $\mathfrak{R}$ (comme $W(k)$-algèbre) était majoré par la dimension du premier groupe de cohomologie de l'action de G sur $\mathfrak{M}_n(k)$ associée à $\overline{\rho}$ (par $g.M = \overline{\rho}(g)M\overline{\rho}(g)^{-1}$). Il est raisonnable de croire que les groupes de cohomologie d'ordre supérieur apportent des éléments supplémentaires pour la description de $\mathfrak{R}$. On définit alors :

$$d_i = \dim_k\big(H^i(G, \mathfrak{M}_n(k))\big) .$$

La proposition suivante établit une connexion importante entre déformations des représentations et le groupe de cohomologie dont d_2 :

Proposition 4.10. *Soit une surjection $A \twoheadrightarrow B$ de noyau I telle que $I\mathfrak{m}_A = 0$ (par exemple, une petite extension). On peut associer à chaque représentation $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(B)$ une classe de cohomologie $\mathcal{O}(\rho) \in H^2(G, \mathfrak{M}_n(k)) \otimes_k I$, telle que ρ admette une déformation à A si et seulement si $\mathcal{O}(\rho) = 0$.*

La classe de cohomologie $\mathcal{O}(\rho)$ mesure l'obstruction à la déformation de la représentation ρ. Cela motive la définition suivante :

Définition 4.11. Si $H^2(G, \mathfrak{M}_n(k)) = 0$, on dit que le problème de déformation est *non-obstrué*.

Lorsque le problème de déformation est non-obstrué, toute représentation peut se déformer le long de petites extensions (d'après la proposition 4.10). Puisque toute surjection est une composition de petites extensions (lemme 3.19), on peut alors relever les représentations le long de n'importe quelle surjection.

Démonstration de la proposition 4.10. Puisqu'on a $I\mathfrak{m}_A = 0$, l'ensemble I est muni d'une structure naturelle de k-espace vectoriel (la multiplication par un scalaire $\lambda \in k$ ne dépend pas du choix d'un représentant $\widetilde{\lambda} \in A$).

Soit un relèvement « ensembliste » $\gamma\ : G \to \mathrm{GL}_n(A)$ de la représentation ρ (c'est-à-dire : un relèvement en chaque $g \in G$, sans exiger qu'il soit un morphisme ; un tel relèvement existe bien sûr toujours puisque $A \to B$ est surjective). La condition que γ soit un morphisme de groupes (et donc une vraie représentation) équivaut à la trivialité de l'élément suivant pour tous $g_1, g_2 \in G$:

$$c(g_1, g_2)\ := \gamma(g_1g_2)\gamma(g_2)^{-1}\gamma(g_1)^{-1}$$

Puisque, considérée modulo $\mathfrak{M}_n(I)$, l'application γ se projette sur ρ qui est un morphisme, on a $c(g_1, g_2) \in I_n + \mathfrak{M}_n(I)$ pour tous $g_1, g_2 \in G$. Ainsi il existe une application $d : G^2 \to \mathfrak{M}_n(I)$ telle que $c(g_1, g_2) = 1 + d(g_1, g_2)$.

Fixons un triplet $(g_1, g_2, g_3) \in G^3$, et calculons $\gamma(g_1g_2g_3)$ de deux manières distinctes. D'une part :

$$\begin{aligned}\gamma(g_1g_2g_3) &= c(g_1g_2, g_3)\gamma(g_1g_2)\gamma(g_3)\\ &= c(g_1g_2, g_3)c(g_1, g_2)\gamma(g_1)\gamma(g_2)\gamma(g_3)\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}\gamma(g_1g_2g_3) &= c(g_1, g_2g_3)\gamma(g_1)\gamma(g_2g_3)\\ &= c(g_1, g_2g_3)\gamma(g_1)c(g_2, g_3)\gamma(g_2)\gamma(g_3).\end{aligned}$$

Ainsi, on a $\gamma(g_1)c(g_1g_2, g_3)c(g_1, g_2) = c(g_1, g_2g_3)\gamma(g_1)c(g_2, g_3)$. Exprimée en termes de l'application d, cette égalité devient (en se rappelant que $I^2 \subseteq I\mathfrak{m}_A = 0$) :

$$\gamma(g_1) + \gamma(g_1)d(g_1g_2, g_3) + \gamma(g_1)d(g_1, g_2) + 0 = \gamma(g_1) + d(g_1, g_2g_3)\gamma(g_1) + \gamma(g_1)d(g_2, g_3) + 0$$

et donc :

$$d(g_1g_2, g_3) + d(g_1, g_2) = \gamma(g_1)^{-1}d(g_1, g_2g_3)\gamma(g_1) + d(g_2, g_3).$$

Il s'agit de la condition de 2-cocycle pour d, et pour l'action de G sur $\mathfrak{M}_n(I) \simeq \mathfrak{M}_n(k) \otimes_k I$ induite par l'action $g.M = \overline{\rho}(g)M\overline{\rho}(g)^{-1}$ de G sur $\mathfrak{M}_n(k)$.

Considérons à présent un autre relèvement (ensembliste) γ' de ρ, et définissons le 2-cocycle associé d' comme ci-dessus. On écrit $\gamma' = \gamma + m$, où m est une application $G \to \mathfrak{M}_n(I)$. Alors :

$$\begin{aligned}d'(g_1, g_2) =\ & \gamma'(g_1g_2)\gamma'(g_2)^{-1}\gamma'(g_1)^{-1} - 1\\ =\ & \gamma(g_1g_2)\gamma(g_2)^{-1}\gamma(g_1)^{-1} - 1\\ & + m(g_1g_2)\gamma(g_2)^{-1}\gamma(g_1)^{-1}\\ & - \gamma(g_1g_2)\gamma(g_2)^{-1}m(g_2)\gamma(g_2)^{-1}\gamma(g_1)^{-1}\\ & - \gamma(g_1g_2)\gamma(g_2)^{-1}\gamma(g_1)^{-1}m(g_1)\gamma(g_1)^{-1}\\ & + (\text{termes dans } I^2 \text{ donc nuls})\\ =\ & d(g_1, g_2)\\ & + m(g_1g_2)\gamma(g_1g_2)^{-1} + (\text{termes dans } I^2)\\ & - \gamma(g_1)m(g_2)\gamma(g_2)^{-1}\gamma(g_1)^{-1} + (\text{termes dans } I^2)\\ & - m(g_1)\gamma(g_1)^{-1} + (\text{termes dans } I^2).\end{aligned}$$

En posant $\alpha(g) = m(g)\gamma(g)^{-1}$, on a donc :

$$d'(g_1, g_2) - d(g_1, g_2) = \alpha(g_1g_2) + g_1.\alpha(g_2) + \alpha(g_1)$$

Autrement dit, $d' - d$ est un 2-cobord. Ce même calcul montre que tout 2-cobord δ donne lieu à un autre relèvement de ρ. Ainsi, l'ensemble des relèvements $G \to \mathrm{GL}_n(A)$ ensemblistes de ρ correspond exactement à **une** classe de cohomologie dans $H^2(G, \mathfrak{M}_n(k) \otimes_k I) = H^2(G, \mathfrak{M}_n(k)) \otimes_k I$. On note cette classe $\mathcal{O}(\rho)$.

Il existe une représentation $G \to \mathrm{GL}_n(A)$ qui relève ρ si et seulement si $\mathcal{O}(\rho)$ est la classe de cohomologie triviale : en effet, il y a un tel relèvement si et seulement si il est possible de choisir un relèvement ensembliste γ qui soit un morphisme, ou de manière équivalente si le 2-cocycle nul appartient à la classe de cohomologie $\mathcal{O}(\rho)$. □

Le théorème suivant relie les propriétés des anneaux de déformations au deuxième groupe de cohomologie de manière plus quantitative :

Théorème 4.12. *On a l'inégalité* $\dim_{\mathrm{Krull}}(\mathfrak{R}/p\mathfrak{R}) \geq d_1 - d_2$. *Si de plus le problème de déformation est non-obstrué, c'est-à-dire si* $d_2 = 0$, *alors l'inégalité ci-dessus est une égalité, et de plus l'anneau de déformation* $\mathfrak{R}$ *est isomorphe à* $W(k)[\![X_1, \ldots, X_{d_1}]\!]$.

Démonstration. On sait déjà qu'il existe une surjection :

$$W(k)[\![T_1, \ldots, T_{d_1}]\!] \twoheadrightarrow \mathfrak{R}$$

qui induit un isomorphisme sur les espaces tangents. Modulo p, cela donne une surjection :

$$k[\![T_1, \ldots, T_{d_1}]\!] \twoheadrightarrow \mathfrak{R}/p\mathfrak{R}$$

induisant toujours un isomorphisme sur les espaces tangents (à gauche, on a k^{d_1}, et à droite on a $t_{\mathfrak{R}}$). Soit I le noyau de cette surjection, on a la suite exacte :

$$0 \to I \to k[\![T_1, \ldots, T_{d_1}]\!] \to \mathfrak{R}/p\mathfrak{R} \to 0.$$

En notant m l'idéal maximal de $k[\![T_1, \ldots, T_{d_1}]\!]$ (l'ensemble des séries de coefficient constant nul), on a la suite exacte suivante :

$$0 \to I/mI \to k[\![T_1, \ldots, T_{d_1}]\!]/mI \to \mathfrak{R}/p\mathfrak{R} \to 0 \tag{4.2}$$

avec toujours un isomorphisme entre les espaces tangents de $k[\![T_1, \ldots, T_{d_1}]\!]/mI$ et $\mathfrak{R}/p\mathfrak{R}$ (on n'a pas changé l'espace tangent car $mI \subseteq m^2$). On écrit alors :

$$\begin{aligned} d_1 &= \dim_{\mathrm{Krull}}(k[\![T_1, \ldots, T_{d_1}]\!]) \\ &= \dim_{\mathrm{Krull}}(k[\![T_1, \ldots, T_{d_1}]\!]/mI) \\ &= \dim_k(I/mI) + \dim_{\mathrm{Krull}}(\mathfrak{R}/p\mathfrak{R}) \end{aligned}$$

Il nous suffit donc de montrer que $\dim_k(I/mI) \leq d_2$.

Considérons la déformation universelle $\boldsymbol{\rho} : G \to \mathrm{GL}_n(\mathfrak{R})$. Il lui correspond une représentation $\boldsymbol{\rho}_p : G \to \mathrm{GL}_n(\mathfrak{R}/p\mathfrak{R})$, obtenue par projection.

L'ensemble I/mI est un idéal de $k[\![T_1, \ldots, T_{d_1}]\!]/mI$ vérifiant $m(I/mI) = 0$. Pour cette raison, on est dans le cas de la proposition 4.10, avec la représentation $\boldsymbol{\rho}_p : G \to \mathrm{GL}_n(\mathfrak{R}/p\mathfrak{R})$ et la surjection $k[\![T_1, \ldots, T_{d_1}]\!]/mI \to \mathfrak{R}/p\mathfrak{R}$. Il existe donc une classe de cohomologie $\mathcal{O}(\boldsymbol{\rho}_p) \in H^2(G, \mathfrak{M}_n(k)) \otimes_k (I/mI)$ associée à $\boldsymbol{\rho}_p$. On définit l'application linéaire suivante :

$$\alpha : \begin{cases} \mathrm{Hom}_k(I/mI, k) & \to & H^2(G, \mathfrak{M}_n(k)) \\ \varphi & \mapsto & (1 \otimes \varphi)(\mathcal{O}(\boldsymbol{\rho}_p)) \end{cases}$$

où $1 \otimes \varphi$ désigne l'application $H^2(G, \mathfrak{M}_n(k)) \otimes_k (I/mI) \to H^2(G, \mathfrak{M}_n(k)) \otimes_k k \simeq H^2(G, \mathfrak{M}_n(k))$ induite par l'identité sur $H^2(G, \mathfrak{M}_n(k))$ et par $\varphi \ : I/mI \to k$. Si l'application α est injective, alors le résultat suit immédiatement en comparant les dimensions :

$$\begin{array}{ccc} \dim_k\Big(\operatorname{Hom}_k(I/mI, k)\Big) & \leq & \dim_k\Big(H^2\big(G, \mathfrak{M}_n(k)\big)\Big) \\ \| & & \| \\ \dim_k(I/mI) & & d_2 \end{array}$$

On montre donc que α est injective. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un morphisme $f \ : I/mI \to k$ non nul dont l'image par α soit triviale. On définit $A = k[\![T_1, \ldots, T_{d_1}]\!]/(mI, \ker(f))$. En reprenant la suite exacte courte de l'équation (4.2), et en quotientant les deux premiers termes par $\ker(f)$, on obtient la suite exacte :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & (I/mI)/\ker(f) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & k[\![T_1, \ldots, T_{d_1}]\!]/(mI, \ker(f)) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, phantom, "\|"] & \mathfrak{R}/p\mathfrak{R} \arrow[r] & 0 \\ & k & A & & \end{tikzcd} \tag{4.3}$$

où, à nouveau, le morphisme π induit un isomorphisme entre les espaces tangents de A et de $\mathfrak{R}/p\mathfrak{R}$. Par ailleurs, $\pi \ : A \twoheadrightarrow \mathfrak{R}/p\mathfrak{R}$ est une petite extension car la longueur de k est 1. Il y a donc une classe de cohomologie associée aux relèvements de $\boldsymbol{\rho}_p$ à A, qui se trouve dans $H^2(G, \mathfrak{M}_n(k)) \otimes_k k \simeq H^2(G, \mathfrak{M}_n(k))$. Vue dans $H^2(G, \mathfrak{M}_n(k)) \otimes_k ((I/mI)/\ker(f))$, cette classe est juste la projection de $\mathcal{O}(\boldsymbol{\rho}_p)$ modulo $\ker(f)$. Ainsi, son image dans $H^2(G, \mathfrak{M}_n(k)) \otimes_k k$ via le morphisme $1 \otimes f$ induit par $f \ : I/mI \to k$ est obtenue en calculant $(1 \otimes f)\mathcal{O}(\boldsymbol{\rho}_p)$, c'est-à-dire $\alpha(f)$, qu'on a supposé nul. Il n'y a donc pas d'obstruction au relèvement de $\boldsymbol{\rho}_p$ à A : on peut choisir une représentation $\rho_A \ : G \to \mathrm{GL}_n(A)$ telle que $\pi_*(\rho_A) = \boldsymbol{\rho}_p$. Par définition de la déformation universelle, il existe un morphisme $\widetilde{g} \ : \mathfrak{R} \to A$ tel que $\rho_A = \mathrm{GL}_n(\widetilde{g}) \circ \boldsymbol{\rho}$. Puisque A est de caractéristique p, $\widetilde{g}$ se factorise à travers un morphisme $g : \mathfrak{R}/p\mathfrak{R} \to A$. Du fait que ρ_A soit un relèvement de $\boldsymbol{\rho}_p$, on déduit que g scinde la suite exacte de l'équation (4.3) (c'est-à-dire que $\pi \circ g = \mathrm{id}_{\mathfrak{R}/p\mathfrak{R}}$) :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\boldsymbol{\rho}_p"] \arrow[rr, bend left, "\rho_A"] \arrow[drr, "\boldsymbol{\rho}_p"'] & \mathrm{GL}_n(\mathfrak{R}/p\mathfrak{R}) \arrow[r, "g"] \arrow[dr, equal] & \mathrm{GL}_n(A) \arrow[d, "\pi"] \\ & & \mathrm{GL}_n(\mathfrak{R}/p\mathfrak{R}) \end{tikzcd}$$

On sait aussi que la surjection $\pi \ : A \twoheadrightarrow \mathfrak{R}/p\mathfrak{R}$ induit un isomorphisme entre les espaces tangents de A et de $\mathfrak{R}/p\mathfrak{R}$. Puisque $\pi \circ g = \mathrm{id}_{\mathfrak{R}/p\mathfrak{R}}$, le morphisme g induit donc sur les espaces tangents l'isomorphisme inverse, qui en particulier est une surjection, et alors g est surjectif d'après le lemme 3.21. On en déduit que $g \circ \pi = \mathrm{id}_A$, d'où $A \simeq \mathfrak{R}/p\mathfrak{R}$. Mais alors $k \simeq \ker(A \xrightarrow{\sim} \mathfrak{R}/p\mathfrak{R}) = 0$, ce qui est absurde. On a ainsi démontré l'inégalité souhaitée.

Deuxième partie de la preuve : Supposons à présent que $d_2 = 0$. Alors l'inégalité $\dim_k(I/mI) \leq d_2$ montre que $\dim_k(I/mI) = 0$ d'où $I = 0$. Ainsi, la surjection $W(k)[\![T_1, \ldots, T_{d_1}]\!] \to \mathfrak{R}$ a noyau nul et est donc un isomorphisme. $\square$

Remarque 4.13. En fait, il est conjecturé que l'inégalité du théorème 4.12 est toujours une égalité ($\dim_{\mathrm{Krull}}(\mathfrak{R}/p\mathfrak{R}) \overset{?}{=} d_1 - d_2$) lorsque $\overline{\rho}$ est absolument irréductible.

4.3.3 Un bout du cas local

Dans la suite, on calcule un peu plus précisément les invariants utilisés dans les sous-sections précédentes dans le cas où G est effectivement un groupe de Galois absolu, et non plus simplement un groupe profini abstrait.

On se place dans le cas $k = \mathbb{F}_p$. On fixe une extension finie K de $\mathbb{Q}_p$, et on pose $d = [K : \mathbb{Q}_p]$, π une uniformisante de $\mathcal{O}_K$, v la valuation de $\mathcal{O}_K$ et $e = v(p)$.

On fixe également une représentation résiduelle $\overline{\rho} \ : G_K \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$. La caractéristique d'Euler du G_K-module $\mathfrak{M}_n(\mathbb{F}_p)$ est donnée par la formule de Tate locale [Ser94, Ch. 1, §5.7, Theorème 5] :

$$\frac{|H^0(G_K, \mathfrak{M}_n(\mathbb{F}_p))| \cdot |H^2(G_K, \mathfrak{M}_n(\mathbb{F}_p))|}{|H^1(G_K, \mathfrak{M}_n(\mathbb{F}_p))|} = \frac{1}{[\mathcal{O}_K : |\mathfrak{M}_n(\mathbb{F}_p)|\mathcal{O}_K]}$$

C'est-à-dire :

$$\frac{p^{d_0}p^{d_2}}{p^{d_1}} = \frac{1}{[\mathcal{O}_K : p^{n^2}\mathcal{O}_K]}. \tag{4.4}$$

Partitionnons l'ensemble $\mathcal{O}_K/p^{n^2}\mathcal{O}_K = \mathcal{O}_K/\pi^{en^2}\mathcal{O}_K$ selon la valuation de ses éléments :

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_K/p^{n^2}\mathcal{O}_K &= \{0\} \cup \bigsqcup_{i=0}^{en^2-1} (\pi^i\mathcal{O}_K^\times)/\pi^{en^2}\mathcal{O}_K \\ &\simeq \{0\} \cup \bigsqcup_{i=0}^{en^2-1} \mathcal{O}_K^\times/(1+\pi^{en^2-i}\mathcal{O}_K)\end{aligned}$$

Il vient alors :

$$[\mathcal{O}_K/p^{n^2}\mathcal{O}_K] = 1 + \sum_{i=1}^{en^2} |\mathcal{O}_K^\times/U^{(i)}| = 1 + \sum_{i=1}^{en^2} (q-1)|U^{(1)}/U^{(i)}|$$

où $U^{(i)} = 1 + \pi^i\mathcal{O}_K^\times$ (qui est un sous-groupe de $\mathcal{O}_K^\times$), et $q = p^{d/e}$ est le cardinal du corps résiduel $\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K$ de K. Pour $j \geq 1$, on a la suite exacte courte :

$$0 \to U^{(j)}/U^{(j+1)} \to U^{(1)}/U^{(j+1)} \to U^{(1)}/U^{(j)} \to 0$$

dont on tire l'égalité :

$$|U^{(1)}/U^{(i)}| = |U^{(1)}/U^{(i-1)}||U^{(i-1)}/U^{(i)}| = \ldots = \prod_{k=1}^{i-1} |U^{(k)}/U^{(k+1)}|.$$

D'après [Ser62, Ch. 4, §2, Proposition 6], on a $U^{(k)}/U^{(k+1)} \simeq \mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K$ d'où $|U^{(k)}/U^{(k+1)}| = q$, et finalement $|U^{(1)}/U^{(i)}| = q^{i-1}$. Ainsi :

$$[\mathcal{O}_K : p^{n^2}\mathcal{O}_K] = 1 + \sum_{i=1}^{en^2} (q-1)q^{i-1} = q^{en^2} = p^{dn^2}.$$

Ainsi, l'équation (4.4) se réécrit :

$$d_1 - d_2 = d_0 + dn^2.$$

Le nombre d_0 est la dimension de l'ensemble $H^0(G, \mathfrak{M}_n(k))$, qui est l'ensemble des matrices $M \in \mathfrak{M}_n(k)$ qui commutent avec $\overline{\rho}(g)$ pour tout $g \in G$ (ce qu'on avait noté $C_k(\overline{\rho})$ dans la quatrième étape de la preuve du théorème 4.1). En particulier, d'après le lemme 4.4, $d_0 = 1$ lorsque $\overline{\rho}$ est absolument irréductible. Dans ce cas, le théorème 4.12 donne l'inégalité :

$$\dim_{\mathrm{Krull}}(\mathfrak{R}/p\mathfrak{R}) \geq 1 + dn^2.$$

4.3.4 Cas global

Le calcul précédent s'adapte à la situation au cas de $G_{K,S}$, lorsque K est un corps de nombres de degré $d = [K : \mathbb{Q}]$ et S est un ensemble fini de places de K contenant l'ensemble S_∞ des places archimédiennes. Étant donné une représentation résiduelle $\overline{\rho} : G_{K,S} \to \mathrm{GL}_n(k)$ admettant un anneau de déformation universel $\mathfrak{R}$, on peut calculer $d_1 - d_2$ en utilisant la formule de Tate globale pour la caractéristique d'Euler. On obtient alors l'égalité :

$$d_1 - d_2 = d_0 + dn^2 - \sum_{v \in S_\infty} \dim H^0(G_{K_v}, \mathfrak{M}_n(k)).$$

Les détails du calcul sont donnés dans [Gou91, pp. 55-57]. Comme ci-dessus, cela permet de minorer la dimension de $\mathfrak{R}/p\mathfrak{R}$ d'après le théorème 4.12.

4.4 Changement de groupe

Soit un morphisme de groupes $\varphi : H \to G$, avec H et G des groupes profinis satisfaisant tous deux la condition Φ_p. Fixons une représentation résiduelle $\overline{\rho} : G \to \mathrm{GL}_n(k)$ et supposons que $\overline{\rho} \circ \varphi$ soit absolument irréductible. On pose alors la question de la comparaison entre les anneaux de déformation $\mathfrak{R}_{\overline{\rho}}$ et $\mathfrak{R}_{\overline{\rho}\circ\varphi}$. D'abord, remarquons que toute déformation de $\overline{\rho}$ induit une déformation de $\overline{\rho} \circ \varphi$:

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, dashed, bend left, "\rho\circ\varphi"] \arrow[drr, dashed, bend right, "\overline{\rho}\circ\varphi"'] & G \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\overline{\rho}"'] & \mathrm{GL}_n(A) \arrow[d] \\
 & & \mathrm{GL}_n(k)
\end{tikzcd}$$

Cela définit une transformation naturelle :

$$\mathrm{Hom}(\mathfrak{R}_{\overline{\rho}}, -) \simeq D_{\overline{\rho}} \to D_{\overline{\rho}\circ\varphi} \simeq \mathrm{Hom}(\mathfrak{R}_{\overline{\rho}\circ\varphi}, -)$$

c'est-à-dire, par le lemme de Yoneda, un morphisme $\mathfrak{R}_{\overline{\rho}\circ\varphi} \to \mathfrak{R}_{\overline{\rho}}$ (obtenu comme image de $\mathrm{id}_{\mathfrak{R}_{\overline{\rho}}}$).

L'exemple-clé est celui des morphismes $G_{K_v} \hookrightarrow G_{K,S}$, où K_v est la complétion de K pour une place $v \in S$. On veut relier l'anneau de déformation d'une représentation résiduelle $\overline{\rho} : G_{K,S} \to \mathrm{GL}_n(k)$ aux différents anneaux de déformations des représentations $\overline{\rho}_v : G_{K_v} \to \mathrm{GL}_n(k)$. Les morphismes $G_{K_v} \to G_{K,S}$ donnent alors lieu à un morphisme « local-global » :

$$\bigotimes_{v \in S} \mathfrak{R}_{\overline{\rho}_v} \to \mathfrak{R}_{\overline{\rho}}.$$

L'étude de ce morphisme est un outil essentiel pour la description des anneaux de déformations (voir [Bij13]).

Chapitre 5

Zoologie des représentations galoisiennes

Dans toute cette section, on fixe un corps p-adique K (une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, où p est la caractéristique de k). On fixe une clôture algébrique $\overline{K} = \overline{\mathbb{Q}_p}$ de K et on note $\mathbb{C}_K = \mathbb{C}_p$ la complétion de $\overline{K}$. On désigne comme d'habitude par G_K le groupe de Galois absolu de K. On fixe également une représentation résiduelle $\overline{\rho} : G_K \to \mathrm{GL}_n(k)$.

Les représentations p-adiques de G_K sont nombreuses. Par ailleurs, certaines possèdent des propriétés remarquables que toutes n'ont pas, ce qui suggère d'en distinguer diverses classes. Cette démarche est notamment très naturelle lorsqu'on considère les représentations provenant de contextes géométriques, puisque celles-ci tendent à posséder de « bonnes propriétés » lorsqu'elles proviennent d'objets géométriques qui sont eux-mêmes « peu pathologiques ». Cette classification est un des thèmes principaux de la *la théorie de Hodge p-adique*, qui met en lumière une hierarchie fine au sein des représentations galoisiennes en établissant des ponts entre différentes théories cohomologiques.

Vu ce qu'on vient de dire, il est tentant de fixer une classe privilégiée $\mathcal{Q}$ de représentations, invariante par équivalence stricte. On souhaite alors, parmi les déformations de $\overline{\rho}$, ne considérer que celles qui sont de type $\mathcal{Q}$. Cela permet de définir un « foncteur des déformations de type $\mathcal{Q}$ » [1] :

$$D_{\mathcal{Q}} \ : R \mapsto D(R) \cap \mathcal{Q}$$

et de se poser les questions habituelles : la représentabilité, la description des anneaux de déformation, etc.

Dans ce chapitre, on va décrire le formalisme général derrière la classification des représentation galoisiennes (les *anneaux de périodes*) et donner des exemples importants. On reliera également ces notions à la question de la provenance géométrique de ces représentations, et on parlera de divers résultats concernant les anneaux de déformation associés. On concluera le chapitre avec un bref survol de certaines idées en jeu dans la preuve par Wiles de la « conjecture de modularité », dont la conséquence la plus célèbre est le dernier théorème de Fermat.

Remarque 5.1. Dans tout le chapitre, excepté dans la dernière section, nous considérerons exclusivement le cas local. Cependant, les définitions locales se globalisent de la façon suivante : si K est un corps de nombres et S un ensemble fini de places de K, alors une représentation galoisienne $\rho \ : G_{K,S} \to \mathrm{GL}_n(A)$ est *non ramifiée/semi-stable/plate/...* (ou tout autre adjectif

1. Comme on le verra plus tard, le fait qu'il s'agisse effectivement d'un foncteur demande de faire des hypothèses sur $\mathcal{Q}$.

que nous définirons dans le cas local) en un nombre premier $p \in S$ lorsque la représentation galoisienne restreinte $\rho_p := \rho_{|G_{\mathbb{Q}_p}}$ l'est.

5.1 Types de déformations et anneaux de déformation associés

Dans cette section, on donne les conditions pour qu'une classe $\mathcal{Q}$ de représentations définisse effectivement un foncteur des déformations, et pour que ce foncteur admette un pro-représentant (ou une enveloppe).

5.1.1 Types de déformations

On rappelle qu'on a fixé une représentation résiduelle $\overline{\rho} : G \to \mathrm{GL}_n(k)$. Fixons de plus une classe privilégiée $\mathcal{Q}$ de représentations de G.

Définition 5.2. On dit que $\mathcal{Q}$ est un *type de déformation* si les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) $\overline{\rho}$ est dans $\mathcal{Q}$;

(ii) Si une représentation $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(A_1)$ est dans $\mathcal{Q}$ et que $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^0}(A_1, A_2)$ alors $\alpha(\rho) : G \to \mathrm{GL}_n(A_2)$ est dans $\mathcal{Q}$;

(iii) Soit $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{C}^0$ ainsi que des morphismes $\beta_i : A_i \to A_3$ pour $i \in \{1, 2\}$. On pose $A_0 = A_1 \times_{A_3} A_2$. Soit $\rho_0 : G \to \mathrm{GL}_n(A_0)$ une déformation de $\overline{\rho}$ à A_0 et $\rho_i : G \to \mathrm{GL}_n(A_i)$ les déformations induites par ρ_0 pour $i \in \{1, 2, 3\}$. Alors, ρ_0 est dans $\mathcal{Q}$ si et seulement si ρ_1 et ρ_2 sont dans $\mathcal{Q}$ (c'est une sorte de « condition de faisceau ») ;

(iv) Soit $A \in \mathcal{C}$ et $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(A)$. Alors, $\rho \in \mathcal{Q}$ si et seulement si, pour tout $k \geq 0$, la représentation $\rho_k : G \to \mathrm{GL}_n(A/\mathfrak{m}_A^k)$ obtenue par projection est dans $\mathcal{Q}$ (en quelque sorte, $\mathcal{Q}$ est « fermé »).

Les sens directs des hypothèses (iii) et (iv) découlent en fait de l'hypothèse (ii).

Théorème 5.3. *Si $\mathcal{Q}$ est un type de déformation, alors $D_{\mathcal{Q}} : A \to D(A) \cap \mathcal{Q}$ est un foncteur qui admet une enveloppe, et qui est représentable lorsque $\overline{\rho}$ est absolument irréductible.*

Démonstration. On se contente de préciser le rôle de chacune des hypothèses de la définition 5.2 en les reliant aux hypothèses du critère de Schlessinger (théorème 3.20) :

— L'hypothèse (i) est clairement nécessaire et suffisante pour garantir que l'ensemble $D_{\mathcal{Q}}(k)$ est non vide (et donc un singleton), ce qui nous place dans le cadre du critère de Schlessinger ;

— L'hypothèse (ii) est clairement nécessaire et suffisante pour assurer que $D_{\mathcal{Q}}$ soit un foncteur ;

— L'hypothèse (iii) montre que $D_{\mathcal{Q}}$ satisfait les hypothèses du critère de Schlessinger. Déjà, sous cette hypothèse, le morphisme :

$$D_{\mathcal{Q}}(A_1 \underset{A_3}{\times} A_2) \to D_{\mathcal{Q}}(A_1) \underset{D_{\mathcal{Q}}(A_3)}{\times} D_{\mathcal{Q}}(A_2)$$

est surjectif chaque fois que le morphisme correspondant pour D est surjectif. Puisqu'il reste injectif s'il est injectif avec D, et que $D_{\mathcal{Q}}(k[\varepsilon]) \subseteq D(k[\varepsilon])$ est de dimension finie, on vérifie alors les hypothèses du critère de Schlessinger point par point ;

— L'hypothèse (iv) assure que le foncteur des déformations à des anneaux de coefficients quelconques est déterminé par sa restriction à $\mathcal{C}^0$. $\square$

5.1.2 Anneaux de déformations associés.

Fixons un type de déformation $\mathcal{Q}$. On note alors $\mathfrak{R}_{\overline{\rho},\mathcal{Q}}$ l'anneau de déformation associé au foncteur $D_{\mathcal{Q}}$.

Proposition 5.4. *L'anneau $\mathfrak{R}_{\overline{\rho},\mathcal{Q}}$ est un quotient de $\mathfrak{R}_{\overline{\rho}}$.*

Démonstration. L'injection $i \;: D_{\mathcal{Q}}(R) \to D(R)$ donne lieu pour tout $R \in \mathcal{C}^0$ à une injection $I_R \;: \mathrm{Hom}(\mathfrak{R}_{\overline{\rho},\mathcal{Q}}, R) \to \mathrm{Hom}(\mathfrak{R}_{\overline{\rho}}, R)$. L'image de $\mathrm{id}_{\mathfrak{R}_{\overline{\rho},\mathcal{Q}}}$ par $I_{\mathfrak{R}_{\overline{\rho},\mathcal{Q}}}$ est un morphisme $p \;: \mathfrak{R}_{\overline{\rho}} \to \mathfrak{R}_{\overline{\rho},\mathcal{Q}}$ tel que

$$\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{R}_{\overline{\rho},\mathcal{Q}}, R), I_R(f) = f \circ p.$$

En particulier, $dp = I_{k[\varepsilon]}$ est injectif, c'est-à-dire que d^*p est surjectif, et donc p est surjectif d'après le lemme 3.21. Ainsi, $\mathfrak{R}_{\overline{\rho},\mathcal{Q}} \simeq \mathfrak{R}_{\overline{\rho}}/\ker(p)$. □

Exemple 5.5. Soit $\chi : G \to k^\times$ la représentation unidimensionnelle $\det(\overline{\rho})$, et soit $\mathcal{Q}$ la classe des représentations dont le déterminant est χ. Alors, $\mathcal{Q}$ est un type de déformation. Lorsque p ne divise pas n, on a (voir [Gou91, pp. 73-74]) :

$$\mathfrak{R}_{\overline{\rho}} = \mathfrak{R}_{\overline{\rho},\mathcal{Q}} \mathop{\widehat{\otimes}}_{W(k)} W(k)[\![\Gamma]\!]$$

où Γ et $W(k)[\![\Gamma]\!]$ sont définis comme dans la section 4.2. Heuristiquement, on peut interpréter ce résultat de la façon suivante : d'une part, $W(k)[\![\Gamma]\!]$ paramétrise les déterminants possibles (puisqu'il paramétrise les déformations de χ d'après le théorème 4.9), et d'autre part $\mathfrak{R}_{\overline{\rho},\mathcal{Q}}$ paramétrise les déformations de déterminant fixé.

En général, les types de déformation considérés sont liés à la provenance géométrique des représentations. L'étude des anneaux de déformations correspondants permet alors de mieux comprendre les représentations galoisiennes en question, et à travers elles les objets géométriques dont elles proviennent.

5.2 Premiers exemples de types de déformation

Dans cette section, on donne quelques exemples classiques de types de déformations.

Rappels sur le caractère cyclotomique. Soit K un corps parfait (non nécessairement p-adique) et un élément $\sigma \in G_K$. Si $\zeta_i \in \overline{K}$ est une racine primitive p^i-ième de l'unité, alors $\sigma(\zeta_i)$ est une autre racine primitive p^i-ième de l'unité et s'écrit donc $\zeta_i^{a_i}$ pour un certain entier a_i dont la classe modulo p^i est uniquement définie, indépendente du choix de ζ_i, et inversible. La suite $(a_i) \in \prod_i (\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z})^\times$ vérifie $a_i \equiv a_{i+1}[p^i]$ puisque la puissance p-ième d'une racine p^{i+1}-ième est une racine p^i-ième ; elle définit donc un élément de $\mathbb{Z}_p^\times$ qu'on note $\chi_p(\sigma)$. Cet élément est caractérisé par l'égalité $\sigma(\zeta) = \zeta^{\chi_p(\sigma)}$ pour tout entier i et toute racine p^i-ème de l'unité ζ.

Définition 5.6. Le *caractère cyclotomique* est le morphisme de groupes $\chi_p \;: G_K \mapsto \mathbb{Z}_p^\times$ ainsi défini.

Lorsque K est un corps p-adique, on désigne simplement par χ le caractère cyclotomique χ_p. Puisque $\mathbb{Z}_p^\times = \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_p)$, le caractère cyclotomique définit une action de G_K sur $\mathbb{Z}_p$: $\sigma.x = \chi_p(\sigma)x$. Lorsque $\mathbb{Z}_p$ est muni de l'action associée au caractère χ_p^i, on le note $\mathbb{Z}_p(i)$. Avec cette notation, $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}_p(0)$. De même, lorsque M est un $\mathbb{Z}_p$-module muni d'une action de G_K (éventuellement triviale), on définit le $\mathbb{Z}_p[G_K]$-module $M(i)$ comme $M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(i)$, équipé de l'action induite par $\sigma.(x \otimes y) = (\sigma.x) \otimes (\sigma.y)$. Par exemple, on a $\mathbb{Z}_p(i)(j) = \mathbb{Z}_p(i+j)$.

Conditions sur le déterminant. On peut distinguer les représentations $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(A)$ selon leur déterminant, qui est une représentation unidimensionnelle $\det(\rho) : G \to A^\times$ (cf. exemple 5.5). Dans le cas des représentations galoisiennes, une condition naturelle est de considérer les représentations dont le déterminant est le caractère cyclotomique $\chi_p : G_K \to \mathbb{Z}_p^\times$.

Conditions sur la ramification. On rappelle que si K est un corps p-adique, le groupe d'inertie I_K est le sous-groupe de G_K formé des $\sigma \in G_K$ dont l'action sur le corps résiduel $k_K = \mathcal{O}_K/\mathfrak{m}_{\mathcal{O}_K}$ est triviale — c'est-à-dire qu'ils envoient les éléments de $\mathcal{O}_K$ sur des éléments de même image dans le corps résiduel.

Définition 5.7. Une représentation galoisienne $\rho : G_K \to \mathrm{GL}_n(A)$ est *non ramifiée* lorsque le groupe d'inertie I_K est d'image triviale par ρ, c'est-à-dire que $I_K \subseteq \ker(\rho)$.

Les représentations non ramifiées sont exactement celles qui se factorisent par $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{nr}} \mid K) \simeq \mathrm{Gal}(\overline{k}_K \mid k_K)$, où K^{nr} est l'extension non ramifiée maximale de K et k_K est le corps résiduel de K.

Décomposition et représentations de Hodge–Tate. Le caractère cyclotomique, décrit précédemment, est l'exemple fondamentale de représentation galoisienne. L'idée de la décomposition de Hodge–Tate est de décomposer des représentations galoisiennes quelconques en fonction du caractère cyclotomique et de ses puissances.

On donne d'abord une définition « à la main » de cette décomposition, en suivant [Ser68]. L'action de G_K sur $\overline{K}$ s'étend par continuité en une action continue sur $\mathbb{C}_K$. Soit $\rho : G_K \to \mathrm{Aut}(V)$ une représentation galoisienne. On pose :

$$W = V \otimes_K \mathbb{C}_K$$

muni de l'action de G_K suivante : $g.(x \otimes y) = \rho(g)(x) \otimes g(y)$ pour $g \in G_K$, $x \in V$ et $y \in \mathbb{C}_K$. On définit les K-espaces vectoriels suivants :

$$W^i = \{w \in W \mid \forall g \in G_K,\, g.w = \chi(g)^i w\},$$

puis on pose $W(i) = W^i \otimes_K \mathbb{C}_K$. En un sens, $W(i)$ est la partie de W sur laquelle l'action du groupe de Galois ressemble à la puissance i-ième du caractère cyclotomique. On peut aussi faire une analogie avec les espaces propres d'un endomorphisme linéaire.

Il y a une application $\mathbb{C}_K$-linéaire canonique $W(i) \to W$, qui commute avec l'action de G_K. La donnée de toutes ces applications fournit une application $\mathbb{C}_K$-linéaire et G_K-équivariante :

$$\alpha : \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} W(i) \to W.$$

Théorème 5.8. *On a les propriétés suivantes :*

- *L'application α est injective.*
- *Les $\mathbb{C}_K$-espaces vectoriels $W(i)$ sont linéairement indépendants.*
- *Les espaces W^i sont des K-espaces vectoriels de dimension finie.*

On renvoie à [Ser67] pour les démonstrations. On peut désormais définir les représentations de Hodge-Tate :

Définition 5.9. La représentation $\rho : G_K \to \mathrm{Aut}(V)$ est *de Hodge–Tate* lorsque le morphisme α ci-dessus est un isomorphisme.

Autrement dit, une représentation de Hodge-Tate se décompose (« géométriquement », c'est-à-dire sur $\mathbb{C}_K$) comme une somme d'espaces sur lesquels l'action de G_K est donnée par une puissance du caractère cyclotomique. Il est possible de faire une analogie avec les matrices diagonalisables, qui se « décomposent » en multiples de l'identité. Une définition dans le cas global est donnée dans [Ser68].

Une autre façon de définir cette notion est la suivante : on note $d_V(i)$ (le *i-ième poids de Hodge–Tate de V*) la dimension du $\mathbb{C}_K$-espace vectoriel $W(i)$. L'entier $d_V(i)$ est aussi la dimension de l'espace des G_K-invariants de $V(-i) \otimes_K \mathbb{C}_K$, car le « twist » $(-i)$ décale les puissances du caractère cyclotomiques de sorte que les G_K-invariants de $V(-i) \otimes \mathbb{C}_K$ (i.e. les éléments pour lesquels pour lesquels G_K agit comme χ^0) sont les éléments de $V \otimes \mathbb{C}_K$ sur lesquels G_K agit comme χ^i. On a toujours l'inégalité :

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} d_V(i) \leq \dim_{\mathbb{Q}_p}(V)$$

et V est de Hodge–Tate lorsqu'il y a égalité. Au-delà de la distinction entre les représentations de Hodge-Tate et les autres, il est utile de distinguer les représentations selon les valeurs de leurs poids de Hodge-Tate.

5.3 Anneaux de périodes

On doit à Fontaine une définition plus généralisable des représentations de Hodge-Tate, qui s'inscrit dans le formalisme des *anneaux de périodes*. Pour cela, notons B_{HT} l'anneau $\mathbb{C}_K[t, t^{-1}]$ muni de l'action de G_K induite par la formule $\sigma.t = \chi(\sigma)t$. On définit alors l'application suivante, qui associe à une représentation galoisienne un K-espace vectoriel gradué :

$$D_{\mathrm{HT}} : V \mapsto (V \otimes_K B_{\mathrm{HT}})^{G_K}.$$

On a en fait :

$$D_{\mathrm{HT}}(V) \simeq \sum_{i\in\mathbb{Z}} (V \otimes_K t^{-i}\mathbb{C}_K)^{G_K} \simeq \sum_{i\in\mathbb{Z}} (V(-i) \otimes_K \mathbb{C}_K)^{G_K} \simeq \coprod_{i\in\mathbb{Z}} W(i),$$

ce qui fait le lien entre l'application D_{HT} et la définition précédente. Ainsi, la représentation V est de Hodge–Tate lorsque $\dim_K D_{\mathrm{HT}}(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p}(V)$: on dit alors que V est B_{HT}*-admissible*, et cette définition se généralise à d'autre anneaux que B_{HT}.

En construisant B_{HT}, on a intégré toutes les informations sur les puissances du caractère cyclotomique dans un unique anneau. L'avantage de ce formalisme est qu'on peut substituer B_{HT} par d'autres anneaux de périodes pour définir d'autres classes de représentations. Dans la suite, on donne quelques exemples, en suivant [BC09] et [Ber14].

5.3.1 Représentations de de Rham

Dans cette sous-section, nous définissons les représentations de de Rham. Pour plus d'informations, on renvoie vers [Ber04, pp. 12-13] et ses références.

L'anneau B_{dR}. On commence par donner une construire l'anneau de périodes connu sous le nom de B_{dR}. Pour cela, partant de $\mathbb{C}_K$, on considère son anneau des entiers $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}$, et on définit l'anneau « tilté » :

$$\mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}^\flat \overset{\text{déf}}{=} \varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}/(p)$$

où la limite projective est prise « le long du Frobenius », c'est-à-dire selon le système projectif suivant :

$$\mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}/(p) \xleftarrow[x \mapsto x^p]{} \mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}/(p) \xleftarrow[x \mapsto x^p]{} \mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}/(p) \xleftarrow[x \mapsto x^p]{} \cdots$$

Autrement dit, un élément de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}^\flat$ est une suite (x_i) d'éléments de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}/(p)$ vérifiant $x_i = (x_{i+1})^p$. C'est donc le choix d'un élément x_0 de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}/(p)$ et d'une suite compatible de racines p^n-ièmes de x_0 pour tout $n \in \mathbb{N}$. Un élément particulier $\varepsilon \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}^\flat$ est obtenu en posant $\varepsilon_0 = 1$ et en choisissant (récursivement) pour ε_{n+1} une racine primitive p-ième de ε_n.

L'anneau $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}^\flat$, de caractéristique p, est complet pour la valuation suivante : étant donné un élément $x \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}^\flat$, la valuation de x est la valuation p-adique de l'élément

$$x^\sharp \overset{\text{déf}}{=} \lim_{n \to \infty} \widehat{x_n}^{p^n}$$

où $\widehat{x_n}$ est un relèvement arbitraire de x_n dans $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}$.

On note A_{inf} l'anneau $W(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}^\flat)$ des vecteurs de Witt sur $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}^\flat$, et on désigne par $[x] \in A_{\mathrm{inf}}$ le représentant de Teichmüller d'un élément $x \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}^\flat$. On note alors θ l'unique morphisme d'anneau $A_{\mathrm{inf}} \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}$ tel que $\theta([x]) = x^\sharp$. Explicitement, on a en coordonnées :

$$\theta\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} p^n [x_n]\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} p^n (x_n)^\sharp.$$

Le noyau du morphisme θ est un idéal principal de A_{inf}, engendré par l'élément :

$$\xi \overset{\text{déf}}{=} \frac{[\varepsilon] - 1}{[\varepsilon^{1/p}] - 1}.$$

On définit alors l'anneau B_{dR}^+ à partir de A_{inf} en inversant p et en complétant A_{inf} pour la valuation $\ker(\theta)$-adique :

$$B_{\mathrm{dR}}^+ = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} A_{\mathrm{inf}}[1/p]/(\xi^n).$$

Le morphisme $\theta : A_{\mathrm{inf}} \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}$ induit un morphisme continu de B_{dR}^+ dans $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}[1/p] = \mathbb{C}_K$ (qui est déjà complet). L'anneau B_{dR}^+ est un anneau de valuation discrète dont une uniformisante est donné par :

$$t = \log[\varepsilon] = \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \big([\varepsilon] - 1\big)^k.$$

On définit finalement :

$$B_{\mathrm{dR}} = B_{\mathrm{dR}}^+[1/t].$$

L'action continue du groupe de Galois G_K sur $\mathbb{C}_K$ induit par fonctorialité des actions sur $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}$, $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}^\flat$, A_{inf}, B_{dR}^+ et enfin sur B_{dR}. Les éléments de B_{dR} invariants sous l'action de G_K sont exactement les éléments de K : de ce point de vue, B_{dR} ressemble à $\mathbb{C}_p$. En revanche, l'action d'un élément de G_K sur l'uniformisante t est donnée par la multiplication par le caractère cyclotomique, c'est-à-dire que (exactement comme pour le t de B_{HT}) :

$$\mathbb{Z}_p t \simeq \mathbb{Z}_p(1)$$

ce qui n'arrive jamais dans $\mathbb{C}_p$ par un théorème d'Ax, Sen et Tate. Cette propriété vaut parfois à l'élément t sa dénomination de « $2i\pi$ p-adique », via une analogie géométrique. Le fait qu'il existe une uniformisante satisfaisant cette propriété est la principale motivation derrière la définition de B_{dR}.

La filtration naturelle de B_{dR} :

$$\ldots \supset t^{-1}B_{\mathrm{dR}}^{+} \supset B_{\mathrm{dR}}^{+} \supset tB_{\mathrm{dR}}^{+} \supset \ldots$$

est invariante sous l'action de G_K, et le gradué qui lui est associé :

$$\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} t^i B_{\mathrm{dR}}^{+}/t^{i+1}B_{\mathrm{dR}}^{+}$$

est isomorphe à B_{HT}, en tant qu'algèbre graduée munie d'une action de G_K.

Représentations B_{dR}-admissibles. L'anneau B_{dR} étant construit, on peut définir une application D_{dR} de façon analogue à l'application D_{HT} définie précédemment :

$$D_{\mathrm{dR}} \ : V \mapsto (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\mathrm{dR}})^{G_K}.$$

Définition 5.10. Une représentation V est *de de Rham* lorsque $\dim_K D_{\mathrm{dR}}(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p}(V)$.

Théorème 5.11. *Si une représentation V est de de Rham, elle est de Hodge–Tate. De plus, dans ce cas, on a :*

$$\mathrm{Fil}^i D_{\mathrm{dR}}(V)/\mathrm{Fil}^{i+1}D_{\mathrm{dR}}(V) = (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_K(i))^{G_K}$$

où $\mathrm{Fil}^i D_{\mathrm{dR}}(V)$ *désigne* $(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} t^i B_{\mathrm{dR}}^{+})^{G_K}$.

Démonstration. Considérons la filtration naturelle de $D_{\mathrm{dR}}(V)$:

$$\ldots \supset \mathrm{Fil}^{-1}D_{\mathrm{dR}}(V) \supset \mathrm{Fil}^{0}D_{\mathrm{dR}}(V) \supset \mathrm{Fil}^{1}D_{\mathrm{dR}}(V) \supset \ldots$$

Puisque $D_{\mathrm{dR}}(V)$ est de dimension finie (égale à $\dim_{\mathbb{Q}_p}(V)$ par hypothèse), la filtration stationne. En fait, pour i assez grand, on a $\mathrm{Fil}^{-i}D_{\mathrm{dR}}(V) = D_{\mathrm{dR}}(V)$, ce qu'on admet ici. On écrit alors :

$$\dim_{\mathbb{Q}_p}(V) = \dim_K D_{\mathrm{dR}}(V) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \dim_K\bigl(\mathrm{Fil}^i D_{\mathrm{dR}}(V)/\mathrm{Fil}^{i+1}D_{\mathrm{dR}}(V)\bigr).$$

Montrons qu'il existe, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, une injection :

$$\mathrm{Fil}^i D_{\mathrm{dR}}(V)/\mathrm{Fil}^{i+1}D_{\mathrm{dR}}(V) \hookrightarrow (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} t^i\mathbb{C}_K)^{G_K}.$$

Cela suffira à dire :

$$\begin{aligned}\dim_K D_{\mathrm{HT}}(V) &= \sum_{i\in\mathbb{Z}} \dim_K \left((V \otimes_{\mathbb{Q}_p} t^i\mathbb{C}_K)^{G_K}\right)\\ &\geq \sum_{i\in\mathbb{Z}} \dim_K \left(\mathrm{Fil}^i D_{\mathrm{dR}}(V)/\mathrm{Fil}^{i+1}D_{\mathrm{dR}}(V)\right) = \dim_{\mathbb{Q}_p}(V)\end{aligned}$$

d'où l'égalité $\dim_K D_{\mathrm{HT}}(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p}(V)$ et l'isomorphisme annoncé :

$$\mathrm{Fil}^i D_{\mathrm{dR}}(V)/\mathrm{Fil}^{i+1}D_{\mathrm{dR}}(V) = (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} t^i\mathbb{C}_K)^{G_K}.$$

Construire une injection $\mathrm{Fil}^i D_{\mathrm{dR}}(V)/\mathrm{Fil}^{i+1} D_{\mathrm{dR}}(V) \hookrightarrow (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} t^i \mathbb{C}_K)^{G_K}$ revient à construire une suite exacte de la forme :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Fil}^{i+1} D_{\mathrm{dR}}(V) \xrightarrow{\subseteq} \mathrm{Fil}^i D_{\mathrm{dR}}(V) \xrightarrow{k_i} (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} t^i \mathbb{C}_K)^{G_K} \tag{5.1}$$

Le morphisme k_i : $\mathrm{Fil}^i D_{\mathrm{dR}}(V) = (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} t^i B_{\mathrm{dR}}^+)^{G_K} \to (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} t^i \mathbb{C}_K)^{G_K}$ dont on a besoin pour construire cette suite est celui obtenu à partir de $\widetilde{\theta}$: $B_{\mathrm{dR}}^+ \to \mathbb{C}_K$ par fonctorialité.

Commençons par montrer que les éléments de $\mathrm{Fil}^{i+1} D_{\mathrm{dR}}(V)$ ont une image nulle par ce morphisme. Soit $x \in \mathrm{Fil}^{i+1} D_{\mathrm{dR}}(V) = (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} t^{i+1} B_{\mathrm{dR}}^+)^{G_K}$, on écrit :

$$x = \sum v_i \otimes t^{i+1} b_i = \sum v_i \otimes t^i (t b_i)$$

avec $v_i \in V, b_i \in B_{\mathrm{dR}}^+$. L'image par k_i de cet élément est :

$$k_i(x) = \sum v_i \otimes t^i \widetilde{\theta}(t b_i).$$

Par définition de t (comme générateur de l'idéal $\ker(\widetilde{\theta})$, qui contient donc $t b_i$), on a $\widetilde{\theta}(t b_i) = 0$ et donc $k_i(x) = 0$.

Réciproquement, soit $x \in \mathrm{Fil}^i D_{\mathrm{dR}}(V)$ d'image nulle par k_i. On écrit :

$$x = \sum v_i \otimes t^i b_i$$

avec $v_i \in V$ qu'on peut choisir linéairement indépendants et $b_i \in B_{\mathrm{dR}}^+$. Alors :

$$0 = k_i(x) = \sum v_i \otimes t^i \widetilde{\theta}(b_i).$$

Puisque les (v_i) sont linéairement indépendants, on a $t^i \widetilde{\theta}(b_i) = 0$ pour tout i. On en déduit que $b_i \in \ker(\widetilde{\theta}) = (t)$. On a alors $b_i = t c_i$ pour des éléments $c_i \in B_{\mathrm{dR}}^+$ et finalement :

$$x = \sum v_i \otimes t^i (t c_i) = \sum v_i \otimes t^{i+1} c_i \in \mathrm{Fil}^{i+1} D_{\mathrm{dR}}(V).$$

On a donc montré l'exactitude de la suite exacte de l'équation (5.1), ce qui prouve le résultat. □

Les représentations de de Rham forment donc une classe de représentations plus petite que celle des représentations de Hodge–Tate. Dans le cadre de la théorie de Hodge p-adique, des classes encore plus restrictives (définies selon des principes similaires) ont été construites : ce sont (entre autres) les représentations cristallines et (potentiellement) semi-stables. Là encore, les représentations issues d'objets géométriques suffisamment réguliers ont tendance à appartenir à ces classes.

5.3.2 Représentations cristallines

On va passer rapidement sur les représentations cristallines et semi-stables. Pour plus de détails, on peut par exemple consulter [FO08].

Précédemment, on a construit B_{dR} à partir de l'anneau $W(\widetilde{E}^+)$ et du morphisme :

$$\theta \ : \left\{ \begin{array}{ccc} W(\widetilde{E}^+) & \to & \mathcal{O}_{\mathbb{C}_K} \\ [x] & \mapsto & x^\sharp \end{array} \right.$$

On définit l'anneau A^0_{cris} en adjoignant à $W(\widetilde{E}^+)$, pour tout $a \in \ker(\theta)$, un élément $\frac{a^m}{m!}$ vérifiant $m!\frac{a^m}{m!} = a^m$. On définit alors les deux anneaux suivants :

$$\begin{aligned} A_{\mathrm{cris}} &= \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} A^0_{\mathrm{cris}}/p^n A^0_{\mathrm{cris}} \\ B^+_{\mathrm{cris}} &= A_{\mathrm{cris}}[1/p]. \end{aligned}$$

On montre que B^+_{cris} est canoniquement un sous-anneau de B^+_{dR} qui contient l'uniformisante t. On peut alors définir

$$B_{\mathrm{cris}} = B^+_{\mathrm{cris}}[1/t].$$

Ce sous-anneau de B_{dR} est stable par l'action de Galois et, comme ci-dessus, on définit un foncteur $D_{\mathrm{cris}}\ : V \mapsto (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\mathrm{cris}})^{G_K}$ et appeler *cristallines* les représentations V telles que $\dim_K D_{\mathrm{cris}}(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p}(V)$. Cette nomination est motivée par le fait suivant : il existe un site dit « cristallin » sur les k-schémas lorsque k est un corps parfait, et celui-ci permet de définir une théorie cohomologique, la *cohomologie cristalline* ; il se trouve alors que les représentations galoisiennes provenant de cette cohomologie (voir la sous-section 5.4.1) sont cristallines.

5.3.3 Représentations semi-stables

Mentionnons brièvement une dernière classe de représentations. Pour cela, soit $\widetilde{p}$ un élément de $\widetilde{E}^+$ d'image p par θ_0. On définit, dans B^+_{dR} :

$$\log[\widetilde{p}] \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{i\geq 0} (-1)^{n+1} \frac{\left(\frac{[\widetilde{p}]}{p} - 1\right)^n}{n}.$$

Puis on considère le sous-anneau $B_{\mathrm{st}} = B_{\mathrm{cris}}[\log[\widetilde{p}]]$ de B_{dR}, ainsi que le foncteur D_{st} associé.

Définition 5.12. Une représentation galoisienne est *semi-stable* lorsqu'elle est B_{st}-admissible.

Là encore, le choix du nom « semi-stable » a une origine géométrique : la cohomologie étale d'une variété abélienne « semi-stable » définit une représentation galoisienne semi-stable. Les déformations des représentations semi-stables sont au cœur de la preuve par Wiles du dernier théorème de Fermat. Concluons cette section en mentionnant les implications suivantes (détaillées dans [Ill90]) :

$$\text{cristalline} \Rightarrow \text{semi-stable} \Rightarrow \text{de Rham} \Rightarrow \text{Hodge–Tate}$$

5.4 Représentations issues de la géométrie

Dans cette section, nous décrivons plusieurs moyens de définir des représentations galoisiennes à partir d'objets géométriques. De telles représentations sont dites « issues de la géométrie ».

5.4.1 Cohomologie étale

Les exemples les plus importants de représentations issues de la géométrie sont données par la cohomologie étale des variétés sur K. Cela généralise la construction de la sous-section 2.2.3.

Soit X une variété algébrique sur K, et soit $X_{\overline{K}}$ l'extension des scalaires de X à $\overline{K}$:

$$X_{\overline{K}} = X \underset{\mathrm{Spec}(K)}{\times} \mathrm{Spec}(\overline{K}).$$

Un élément $\sigma \in G_K$ définit un automorphisme de $\overline{K}$ et donc un automorphisme de $\mathrm{Spec}(\overline{K})$ qu'on note $\mathrm{Spec}(\sigma)$, puis un automorphisme de $X_{\overline{K}}$ obtenu comme $\mathrm{id}_X \times \mathrm{Spec}(\sigma)$. Ceci définit une action de G_K sur $X_{\overline{K}}$.

On définit la cohomologie (étale) ℓ-adique de $X_{\overline{K}}$, notée $H^r_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$, comme le $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel suivant (voir [Mil13 ; Har77]) :

$$H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell) \overset{\text{déf}}{=} \left(\varprojlim_n H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{K}},\, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}) \right) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell.$$

Par fonctorialité de la cohomologie étale, l'action de G_K sur $X_{\overline{K}}$ induit une action de G_K sur la cohomologie ℓ-adique, c'est-à-dire un morphisme $G_K \to \mathrm{Aut}(H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell))$. Il s'agit d'une représentation galoisienne, dont la dimension est donnée par le i-ième nombre de Betti de $X_{\overline{K}}$.

Théorème 5.13 (Faltings)**.** *Soit X une variété projective lisse sur un corps p-adique K. Alors $H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ est une représentation de de Rham de G_K.*

Le théorème 5.13 est un résultat difficile, au cœur de la théorie de Hodge p-adique. Sans le démontrer, nous expliquons à présent les idées essentielles. Quand $\varphi : R \to S$ est un morphisme d'anneaux, le foncteur qui à un S-module M associe l'ensemble des dérivations R-linéaires de S dans M (c'est-à-dire les applications linéaires $d\ : S \to M$ satisfaisant $d(xy) = x(dy) + (dx)y$ et $d(\varphi(x)) = 0$ pour $x \in R$) est représenté par un S-module $\Omega_{S|R}$. Soit $\Omega^i_{S|R}$ la i-ième puissance extérieure de $\Omega_{S|R}$. Le morphisme identité $\Omega_{S|R} \to \Omega_{S|R}$ correspond à une dérivation $d\ : S \to \Omega_{S|R}$ qui induit, par une formule du type $d(fg_1 \wedge \ldots \wedge g_i) = df \wedge dg_1 \wedge \ldots \wedge dg_i$, le complexe suivant :

$$0 \to S \xrightarrow{d} \Omega_{S|R} \xrightarrow{d} \Omega^2_{S|R} \xrightarrow{d} \Omega^3_{S|R} \xrightarrow{d} \ldots$$

dont la cohomologie s'appelle *cohomologie de de Rham algébrique*. On la note $H^*_{\mathrm{dR}}(S|R)$. Un principe similaire plus général (utilisant l'hypercohomologie) permet de définir $H^*_{\mathrm{dR}}(X|Y)$ lorsque $X \to Y$ est un morphisme de schémas (voir [Cha14]). Notamment, quand X est une variété sur un corps K, la cohomologie de de Rham est un K-espace vectoriel $H^*_{\mathrm{dR}}(X|\,\mathrm{Spec}(K))$ que l'on note $H^*_{\mathrm{dR}}(X|K)$, muni d'une action de G_K. La représentation galoisienne correspondante est « naturellement » de de Rham. Le théorème 5.13 découle alors d'une comparaison entre la cohomologie étale et la cohomologie de de Rham, c'est-à-dire d'un isomorphisme :

$$B_{\mathrm{dR}} \otimes_K H^*_{\mathrm{dR}}(X \mid K) \xrightarrow{\sim} B_{\mathrm{dR}} \otimes_K H^*_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell).$$

En effet, cet isomorphisme étant connu, les deux cohomologies ont même image par le foncteur D_{dR}, et l'une est donc B_{dR}-admissible dès que l'autre l'est. On trouve des détails supplémentaires dans [Ill90 ; Tsu02]. Le fait plus faible que les représentations provenant de la cohomologie étale ℓ-adiques sont de Hodge–Tate est démontré dans [Fen13].

La conjecture de Fontaine–Mazur. La conjecture de Fontaine–Mazur est une conjecture ouverte portant sur les représentations galoisiennes. Celle-ci propose des critères permettant de déterminer si une représentation provient de la cohomologie étale d'une variété algébrique.

Conjecture 5.14 (Fontaine–Mazur)**.** *Soit $\rho\ : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation irréductible p-adique (c'est-à-dire que V est un $\overline{\mathbb{Q}}_p$-espace vectoriel de dimension finie), ramifiée en un nombre fini de nombres premiers. On suppose que la représentation restreinte $\rho_{|G_{\mathbb{Q}_p}}$ est de de Rham. Il existe alors une variété X sur $\mathbb{Q}$, projective et lisse, ainsi que des entiers $i \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{Z}$, tels que ρ soit obtenue comme quotient d'une sous-représentation de $H^i_{\text{ét}}\big(X_{\overline{\mathbb{Q}}}, \overline{\mathbb{Q}}_p(j)\big)$.*

Le succès de l'utilisation de la théorie des déformations dans l'étude de la modularité des courbes elliptiques (voir la section 5.5) suggère de l'utiliser pour étudier cette question. Par exemple, dans [Kis09], Kisin montre un cas particulier en utilisant cette approche.

5.4.2 Schémas en groupe, représentations plates

On introduit brièvement les schémas en groupe, en suivant [Snoll], pour expliquer l'apparition naturelle des représentations galoisiennes dans leur étude.

Définition 5.15. Un K-*schéma en groupe* est un schéma G sur K muni de morphismes de K-schémas imitant les opérations habituelles des groupes : une multiplication $G \times G \to G$, un élément neutre $e\ : \mathrm{Spec}(K) \to G$ et un inverse $G \to G$, faisant commuter les diagrammes correspondant aux axiomes des groupes (associativité de la multiplication, l'élément neutre est neutre, la multiplication par l'inverse donne le neutre). On définit de même les notions de K-*schéma en groupe abélien*, etc. Les *morphismes de schémas en groupe* sont les morphismes de schémas envoyant ces opérations les unes sur les autres (autrement dit, les diagrammes attendus commutent).

Soit G un K-schéma en groupe. On note $G(\overline{K})$ l'ensemble des $\overline{K}$-points de G, c'est-à-dire $\mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(\overline{K}), G)$ dans la catégorie des K-schémas. On fait plusieurs observations :

— $G(\overline{K})$ est muni d'une structure de groupe. En effet si on a deux points $x_1, x_2\ : \mathrm{Spec}(\overline{K}) \to G$, on en obtient un troisième en composant le produit $x_1 \times x_2 : \mathrm{Spec}(\overline{K}) \to G \times G$ par la multiplication interne de G. L'opération ainsi définie est une loi de groupe (comme on le remarque en utilisant les opérations identité et inverse), qui est abélien si G est abélien.

— $G(\overline{K})$ est muni d'une action de $\mathrm{Gal}(\overline{K}|K)$. En effet, si on a un point $x\ : \mathrm{Spec}(\overline{K}) \to G$ et un élément $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{K}|K)$, qui définit un automorphisme $\mathrm{Spec}(\sigma)$ de $\mathrm{Spec}(\overline{K})$, on pose $\sigma.x = x \circ \mathrm{Spec}(\sigma)$.

On dit que p^N *annule* G lorsque le morphisme $p^N \times \bullet\ : G \to G$ induit par la composition p^N-uple de la multiplication interne de G (pour un parenthésage quelconque) coïncide avec le morphisme

$$G \longrightarrow \mathrm{Spec}(K) \xrightarrow{e} G$$

Dans ce cas, le groupe $G(\overline{K})$ des $\overline{K}$-points de G est de p^N-torsion. Si G est un K-schéma en groupe abélien annulé par p^N, alors $G(\overline{K})$ est un $\mathbb{Z}/p^N\mathbb{Z}$-module muni d'une action de $\mathrm{Gal}(\overline{K}|K)$, c'est-à-dire une représentation galoisienne $\mathrm{Gal}(\overline{K}|K) \to \mathrm{Aut}(G(\overline{K}))$.

Définition 5.16. Un K-schéma en groupe G est *fini plat* si le morphisme structurel $G \to \mathrm{Spec}(K)$ est fini et localement libre (voir [Stacks, Section 02K9] pour les définitions de ces termes).

Cela permet de définir une nouvelle classe de représentations :

Définition 5.17. Une représentation galoisienne p-adique $\rho\ : G_{\mathbb{Q}_p} \to \mathrm{GL}_n(A)$ est *plate* lorsque, pour tout idéal $I \subset A$ tel que A/I soit fini, la représentation $G_{\mathbb{Q}_p} \to \mathrm{GL}_n(A/I)$ induite provient d'un schéma en groupe abélien fini plat annulé par p^N pour N assez grand.

5.5 Un mot sur le dernier théorème de Fermat

Dans le contexte d'un tour d'horizon de la théorie des déformations, il serait dommage de ne pas évoquer l'une de ses applications les plus retentissantes — à savoir son rôle dans la démonstration du dernier théorème de Fermat par Andrew Wiles. Cette section en décrit les grandes lignes, en ne donnant ni preuves ni détails. Le principal objectif est de clarifier le lien entre l'énoncé du théorème et la théorie, visiblement assez éloignée, des déformations de représentations galoisiennes. On suit le chapitre introductif de [CSS97]. On recommande aussi le visionnage de cet exposé excellent de Ribet : `https://www.youtube.com/watch?v=mq9BS6S2E2k`.

Quand on utilise des notations des chapitres précédents dans cette section, on se place systématiquement la situation suivante :

— La dimension des représentations galoisiennes est toujours $n = 2$;

— Le corps k est toujours $\mathbb{F}_p$, pour un nombre premier p qu'on précise à chaque fois. Rappelons que, dans ce cas, on a $W(k) = \mathbb{Z}_p$.

5.5.1 Courbes elliptiques (et représentations) modulaires

Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est formé des matrices à coefficients dans $\mathbb{Z}$ dont le déterminant vaut 1. Une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ agit sur un point du demi-plan supérieur étendu $\mathbb{H}^* = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\} \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ de la façon suivante : l'image d'un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ avec $\Im(z) > 0$ est :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d} \ ;$$

si $c \neq 0$, l'image de ∞ est $\frac{a}{c}$, l'image de $-\frac{d}{c}$ est ∞, et l'image d'un rationnel $x \neq -\frac{d}{c}$ est $\frac{ax+b}{cx+d}$; si $c = 0$, alors l'image de ∞ est ∞ et l'image d'un rationnel x est $\frac{ax+b}{d}$.

Soit $\Gamma_0(N)$ le sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ formé des matrices de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ dont le coefficient en bas à gauche est multiple de N, et $X_0(N)$ le quotient de $\mathbb{H}^*$ par $\Gamma_0(N)$. On peut munir cet espace d'une structure de surface de Riemann compacte, et on peut par conséquent le voir (par les théorèmes G.A.-G.A. de Serre) comme une courbe algébrique complexe lisse et irréductible. De plus, cette courbe est définie sur $\mathbb{Q}$ (les polynômes Φ_n correspondants, connus sous le nom de « polynômes modulaires », sont très bien étudiés). La courbe $X_0(N)$ est connue sous le nom de « courbe modulaire classique de niveau N ».

Soit une courbe elliptique E sur $\mathbb{Q}$, qu'on voit comme une courbe algébrique de genre 1.

Définition 5.18. La courbe elliptique E est *modulaire* lorsqu'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ et un morphisme de $\mathbb{Q}$-schémas $X_0(N) \to E$ non-constant.

Le fait qu'une courbe elliptique soit ou non modulaire peut s'observer au niveau de la représentation galoisienne à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$ associée (voir la sous-section 2.2.3). Nous nous contenterons ici de dire qu'il est possible de donner une définition « naturelle » de la notion de *représentation galoisienne modulaire* et que, pour cette définition, une courbe elliptique est modulaire exactement lorsqu'il existe un nombre premier p tel que la représentation galoisienne $\rho_p : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ associée est modulaire (et c'est alors le cas pour tous les nombres premiers p).

L'étude des déformations (modulaires) des représentations modulaires est au cœur de la preuve du dernier théorème de Fermat. Une conséquence des travaux de Wiles et de ses successeurs est que toute courbe elliptique est modulaire.

5.5.2 Théorème de Fermat, courbes elliptiques, formes modulaires

Dans cette sous-section, on décrit rapidement la manière dont le dernier théorème de Fermat est relié aux courbes elliptiques et à la question de leur modularité, et donc aux représentations galoisiennes. L'approche décrite ici, antérieure aux travaux de Wiles, est due à Frey, Hellegouarch, Ribet et Serre.

Courbe elliptique de Frey-Hellegouarch. Soit un contre-exemple au dernier théorème de Fermat de la forme $a^p + b^p = c^p$, où p est un nombre premier au moins égal à 5, et où a, b, c sont trois entiers non nuls. On se ramène sans problème au cas où b est pair et $c \equiv 1 \bmod 4$. On considère alors la courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$ d'équation suivante :

$$y^2 = x(x - a^p)(x + b^p).$$

Cette courbe est *semi-stable* : si on la regarde dans $\overline{\mathbb{Q}}$, elles ne peut avoir pour singularités que des points doubles, mais aucun *cusp* ; cela se traduit par le fait que la représentation galoisienne associée (sous-section 2.2.3) soit semi-stable (définition 5.12).

En étudiant cette courbe elliptique, Ribet a découvert un fait surprenant, lié notamment au fait que le discriminant de $x(x-a^p)(x+b^p)$ soit une puissance p-ième (à savoir $(abc)^{2p}$) : si cette courbe elliptique existe, elle ne peut pas être modulaire (voir [Rib95] pour un énoncé précis). Cette observation va à l'encontre d'une conjecture de Taniyama, Shimura et Weil, aujourd'hui démontrée (et s'inscrivant dans un ensemble plus vaste de conjectures nommé *programme de Langlands*), selon laquelle toute courbe elliptique est modulaire. L'existence d'un contre-exemple au dernier théorème de Fermat implique l'existence d'une courbe elliptique semi-stable non modulaire, et la résolution de la conjecture de Taniyama–Shimura–Weil entraîne donc le dernier théorème de Fermat !

La démonstration de Wiles. Wiles démontre en 1995 que toute courbe elliptique semi-stable sur $\mathbb{Q}$ est modulaire, rejetant ainsi l'hypothèse de l'existence d'un contre-exemple au dernier théorème de Fermat. Pour cela, partant d'une courbe elliptique semi-stable E quelconque, il démontre les faits suivants :

1. Si, pour un nombre premier p quelconque, la représentation résiduelle $\overline{\rho}_p : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ associée est modulaire, alors la courbe elliptique E est modulaire ;
2. Au moins l'une des deux représentations résiduelles $\overline{\rho}_3$ et $\overline{\rho}_5$ est irréductible.
3. Si $\overline{\rho}_3$ est irréductible, alors elle est modulaire, et donc la courbe E est modulaire d'après le point 1 ;
4. On se place dans le cas où $\overline{\rho}_5$ est irréductible, qui est le seul restant. Il existe alors une autre courbe elliptique semi-stable E' avec $\overline{\rho}'_3$ irréductible et $\overline{\rho}'_5 \simeq \overline{\rho}_5$. Par le point précédent, la courbe E' est modulaire, et donc $\overline{\rho}'_5 \simeq \overline{\rho}_5$ est modulaire, et donc la courbe elliptique E est modulaire d'après le point 1.

La théorie des déformations des représentations galoisienne intervient dans la preuve du premier point, qui affirme que la modularité de la courbe ne dépend que de la modularité de la représentation résiduelle $\overline{\rho}_p : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ associée. Le fait que la modularité d'une courbe elliptique résulte de la modularité de la représentation $\rho_p : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ pour un nombre premier p quelconque est classique : le coup de force de Wiles a été de parvenir à relier la modularité des représentations $\overline{\rho}_p$ et ρ_p — et, en particulier, de montrer que les déformations d'une représentation modulaire sont elles-mêmes modulaires (sous de bonnes hypothèses). La sous-section suivante présente ce résultat plus en détail, en le reliant aux notions présentées dans les autres sections de ce mémoire.

5.5.3 Le théorème de relèvement modulaire

Soit une représentation galoisienne (résiduelle) $\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$. satisfaisant les hypothèses suivantes :

— Le caractère $\det(\overline{\rho}) : G_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{F}_p^\times$ est le caractère cyclotomique (définition 5.6) ;

— $\overline{\rho}$ est semi-stable en tout nombre premier (définition 5.12 et remarque 5.1) ;

— $\overline{\rho}$ est absolument irréductible (définition 2.8) ;

— $\overline{\rho}$ est modulaire (définition 5.18) ;

— $\overline{\rho}_{|G_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}}$ est absolument irréductible (définition 2.8).

On note S l'ensemble des nombres premiers différents de p en lesquels $\overline{\rho}$ est ramifiée (définition 5.7 et remarque 5.1), et on fixe un ensemble fini Σ de nombre premiers, d'intersection vide avec S.

Définition 5.19. Une représentation $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ est *de type* $\mathcal{D}$ si elle satisfait les hypothèses suivantes :

— Le caractère $\det(\rho) : G_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Z}_p^\times$ est le caractère cyclotomique (définition 5.6) ;

— ρ est non-ramifiée en tout nombre premier $\ell \notin S \cup \{p\} \cup \Sigma$ (définition 5.7 et remarque 5.1) ;

— ρ est semi-stable en tout nombre premier $\ell \notin \Sigma$ (définition 5.12 et remarque 5.1) ;

— si $p \notin \Sigma$ et si $\overline{\rho}$ est plate en p, alors ρ est également plate en p (définition 5.17 et remarque 5.1).

Le théorème de Wiles s'énonce alors de la façon suivante :

Théorème 5.20. *Toute représentation $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ de type $\mathcal{D}$ relevant $\overline{\rho}$ est modulaire.*

Méthodes employées. Pour démontrer ce théorème, Wiles s'intéresse au foncteur $D_{\mathcal{D}}$ des déformations de $\overline{\rho}$ qui sont de type $\mathcal{D}$. À ce foncteur correspond un anneau de déformation universel $\mathfrak{R}_{\mathcal{D}}$. Parallèlement, la théorie des formes modulaires permet de définir l'algèbre de Hecke $\mathbf{T}_{\mathcal{D}}$ qui, en un sens imprécis mais suffisant pour notre explication, peut être vue comme classifiant les déformations modulaires de type $\mathcal{D}$ de la représentation $\overline{\rho}$. Il y a alors une surjection naturelle, dans l'esprit de la proposition 5.4 :

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{D}} \twoheadrightarrow \mathbf{T}_{\mathcal{D}}.$$

Montrer que toutes les déformations de $\overline{\rho}$ qui sont de type $\mathcal{D}$ sont modulaires revient à démontrer que cette surjection est un isomorphisme. Wiles ramène ce problème à l'égalité d'invariants numériques, selon un principe comparable aux calculs de dimensions cohomologiques de la section 4.3. Il démontre alors ces égalités et en déduit le théorème annoncé.

Ce schéma de preuve illustre la force de la théorie des déformations : en construisant des espaces classifiants pour des objets arithmétiques, on peut étudier ces objets en utilisant des invariants provenant de la géométrie, tels que la dimension et la cohomologie.

Chapitre 6

Conclusion

J'espère avoir transmis au cours de ce travail une idée fidèle et enthousiasmante de la théorie des déformations des représentations galoisiennes, dont j'ai évidemment à peine effleuré les ramifications. Il m'a fallu faire des choix d'exposition difficiles, mais j'ai essayé de renvoyer vers des références dont la lecture devrait corriger mes omissions.

Personnellement, je me réjouis d'avoir eu l'occasion de réaliser ce travail qui m'a beaucoup appris. Je regrette d'avoir dû faire l'impasse sur nombre de preuves et de n'avoir pas eu le temps d'en apprendre davantage sur les formes modulaires et sur la théorie de Hodge p-adique. Malgré tout, ce travail a été une agréable conclusion de mon master. Il m'a notamment permis de réutiliser des connaissances acquises lors de mon stage de M1 et de les approfondir largement.

Je remercie Xavier Caruso de m'avoir proposé ce sujet et d'avoir toujours répondu à mes questions malgré la distance, et Ariane Mézard d'avoir accepté de faire partie du jury pour ma soutenance, et de m'avoir suggéré la lecture des travaux de Galatius et Venkatesh sur les anneaux de déformation dérivés. Je remercie aussi mes ami·e·s, notamment A.T., L.G.G. et Y.M.H., d'avoir su me donner la motivation de travailler quand j'en avais besoin et l'occasion de faire autre chose quand il le fallait. Merci à C.G., R.R., M.R. et E.B. pour les discussions mathématiques toujours passionnées et passionnantes. Et un merci tout particulier à R.R., L.G., P.C., M.D. et P.F. d'être venu·e·s à ma soutenance et d'y avoir apporté des viennoiseries.

Ajout (2024) : Merci à toutes les personnes qui, m'ayant fait part de leur intérêt pour ce texte, m'ont motivé à le réviser afin, notamment, d'en améliorer l'organisation et la clarté.

Bibliographie

[AW67] M. F. Atiyah et C. T. C. Wall. "Cohomology of Groups". In : J. W. S. Cassels et A. Fröhlich. *Algebraic Number Theory.* 1967, p. 94-115.

[BC09] Olivier Brinon et Brian Conrad. "Notes on p-adic Hodge Theory". In : *CMI Summer School.* 2009.

[Ber04] Laurent Berger. "An Introduction to the Theory of p-adic Representations". In : (2004).

[Ber14] John Bergdall. *p-adic Hodge theory seminar.* 2014. url : `http://math.bu.edu/people/bergdall/seminars/padic-hodge-seminar.html`.

[Bij13] Stéphane Bijakowski. *Deformation rings.* 2013. url : `http://stephane-bijakowski.perso.math.cnrs.fr/deformation%20rings.pdf`.

[Cha14] François Charles. *The de Rham complex and topics in deformation theory.* 2014. url : `https://www.math.u-psud.fr/~fcharles/CoursAG.pdf`.

[Con09] Brian Conrad. *Modularity lifting seminar.* 2009-2010. url : `http://virtualmath1.stanford.edu/~conrad/modseminar/`.

[CSS97] Gary Cornell, Joseph H. Silverman et Glenn Stevens, éd. *Modular Forms and Fermat's Last Theorem.* Springer-Verlag New York, 1997.

[Dat18] Jean-François Dat. *Introduction à l'arithmétique des courbes elliptiques.* 2018-2019.

[Fen13] Tony Feng. "Hodge-Tate Theory". Bachelor thesis. Harvard University, 2013. url : `http://web.stanford.edu/~tonyfeng/hodge_tate.pdf`.

[FO08] Jean-Marc Fontaine et Yi Ouyang. *Theory of p-adic Galois Representations.* 2008. url : `http://math.stanford.edu/~conrad/252Page/handouts/galoisrep.pdf`.

[Gou91] Fernando Q. Gouvêa. *Deformations of Galois Representations.* American Mathematical Society, 1991.

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry.* Springer-Verlag New York, 1977.

[Ill90] Luc Illusie. "Cohomologie de De Rham et cohomologie étale p-adique". In : Astérisque*, tome 189-190.* 1990, p. 325-374.

[Iye19] Ashwin Iyengar. *Deformation theory of the trivial mod p Galois representation for* GL_n. 2019. eprint : `arXiv:1904.05996`.

[Kis09] Mark Kisin. "The Fontaine-Mazur Conjecture for GL_2". In : *Journal of the American Mathematical Society* 22.3 (2009), p. 641-690. url : `https://www.ams.org/journals/jams/2009-22-03/S0894-0347-09-00628-6/S0894-0347-09-00628-6.pdf`.

[Lac16] Clara LACROCE. "Deformations of Galois Representations". Mém. de mast. Concordia University, 2016.

[Maz89] Barry MAZUR. "Deforming Galois representations". In : *Galois Groups over* $\mathbb{Q}$. Sous la dir. d'Ihara Y., Ribet K. et Serre J.-P. T. 16. Mathematical Sciences Research Institute Publications, Springer-Verlag, 1989, p. 385-437.

[Maz97] Barry MAZUR. "An Introduction to the Deformation Theory of Galois Representations". In : Cornell G., Silverman J.H. et Stevens G. *Modular Forms and Fermat's Last Theorem.* Springer, New York, NY, 1997, p. 243-311.

[Mil13] James S. MILNE. *Lectures on Etale Cohomology (v2.21).* 2013. URL : `https://www.jmilne.org/math/CourseNotes/LEC.pdf`.

[Neu99] Jürgen NEUKIRCH. *Algebraic Number Theory.* T. 322. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1999, p. 140-141.

[Rib95] Kenneth A. RIBET. "Galois representations and modular forms". In : (1995). eprint : `arXiv:math/9503219`. URL : `Bull.Amer.Math.Soc.(N.S.)32(1995)375-402`.

[Ser62] Jean-Pierre SERRE. *Corps Locaux.* Hermann, Paris, 1962.

[Ser67] Jean-Pierre SERRE. "Sur les groupes de Galois attachés aux groupes p-divisibles". In : *Proceedings of a Conference on Local Fields.* Springer-Verlag, 1967, p. 113-131.

[Ser68] Jean-Pierre SERRE. *Abelian ℓ-adic Representations and Elliptic Curves.* Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1968. Chap. III, p. 5-7 ; 41-46.

[Ser94] Jean-Pierre SERRE. *Cohomologie galoisienne.* T. 5. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1994. ISBN : 3-540-58002-6. DOI : `10.1007/BFb0108758`.

[Snoll] Andrew SNOWDEN. *Course on Mazur's theorem – Lectures 6-8.* Fall 2013. URL : `http://www-personal.umich.edu/~asnowden/teaching/2013/679/`.

[Stacks] The STACKS PROJECT AUTHORS. *The Stacks project.* `https://stacks.math.columbia.edu`.

[Tsu02] Takeshi TSUJI. "Semi-stable conjecture of Fontaine-Jannsen : a survey". In : Astérisque*, tome 279.* 2002, p. 323-370.

[Vak00] Ravi VAKIL. *Deformation theory and moduli spaces.* 2000. URL : `https://math.stanford.edu/~vakil/727/`.