

Et si on faisait comme pour les complexes avec la trigonométrie hyperbolique ?

Ou comment j'ai perdu mon après-midi.

I. Approche intuitive

On voudrait avoir une quantité ι (iota, par analogie avec le i complexe) telle que :
 $\forall x \in \mathbb{R}, e^{\iota x} = \cosh x + \iota \sinh x$.

En utilisant les développements en série, on doit donc avoir :
 $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k \geq 0} \frac{\iota^k x^k}{k!} = \sum_{k \geq 0, k \text{ pair}} \frac{x^k}{k!} + \iota \sum_{k \geq 0, k \text{ impair}} \frac{x^k}{k!}$ c'est à dire que les puissances impaires de ι valent ι et que les puissances paires de ι valent 1.

En supposant la multiplication dans $\mathbb{R} + \iota \mathbb{R}$ distributive, on peut donc s'attendre à avoir : $\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, (a + \iota b) \times (c + \iota d) = ac + \iota ad + \iota bc + \iota^2 bd = (ac + bd) + \iota(ad + bc)$.

On va donc tenter de formaliser ce système en postulant que la multiplication dans $\mathbb{R} + \iota \mathbb{R}$ se comporte ainsi.

II. Formalisation

On définit les lois suivantes sur les couples de \mathbb{R}^2 :

- $\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4, (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$
- $\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4, (x, y) \times (x', y') = (xx' + yy', xy' + x'y)$

Des propriétés de l'addition dans \mathbb{R} découle facilement que l'addition que nous venons de définir est interne, associative, commutative, qu'il existe un unique élément neutre $(0, 0)$ et qu'en outre tout élément de \mathbb{R}^2 possède un opposé. En effet :
 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) + (0, 0) = (x, y)$ et $(x, y) + (-x, -y) = (-x, -y) + (x, y) = (0, 0)$. $(\mathbb{R}^2, +)$ est donc un groupe abélien (et c'est heureux, sinon notre addition n'aurait pas beaucoup de sens...).

La multiplication définie auparavant a aussi ses qualités : elle est interne, associative, commutative et il existe un unique élément neutre $(1, 0)$. La plupart des couples sont inversibles car si $x^2 \neq y^2$, alors : $\left(\frac{x}{x^2 - y^2}, \frac{-y}{x^2 - y^2} \right) \times (x, y) = \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 - y^2}, \frac{xy - yx}{x^2 - y^2} \right) = (1, 0)$, mais on ne peut pas trouver d'inverse lorsque $x^2 = y^2$ (on démontrera cela lorsque plus d'outils auront été introduits). Il existe donc un nombre infini (et même indénombrable) d'éléments non inversibles. (\mathbb{R}^2, \times) est donc un monoïde commutatif.

On montre assez facilement que la multiplication est distributive sur l'addition.

$(\mathbb{R}^2, +, \times)$ est donc un anneau commutatif, donc le cardinal est celui de \mathbb{R}^2 , c'est-à-dire 2^{\aleph_0} .

On pose $\iota = (0, 1)$ et on identifie un réel $x \in \mathbb{R}$ au couple $(x, 0)$. Le couple $(1, \iota)$ forme alors une base du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^2 . À chaque couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ correspond donc une

et une seule expression sous la forme $x+iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On décide de noter \mathbf{H} l'ensemble $\mathbb{R}+i\mathbb{R}$. Pour tout $z \in \mathbf{H}$ on note $\Re(z)$ et $\Im(z)$ les uniques réels tels que $z = \Re(z) + i\Im(z)$. On pose : $\forall z \in H, \bar{z} = \Re(z) - \Im(z)$.

III. Calcul dans \mathbf{H}

On montre aisément que : $\forall z \in H, \Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ et $\Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.

$$\forall (z, z') \in H^2, \overline{z+z'} = (\Re z + \Re z') - i(\Im z + \Im z') = (\Re z - i\Im z) + (\Re z' - i\Im z') = \bar{z} + \bar{z}'$$

$$\forall (z, z') \in H^2, \overline{zz'} = \overline{(\Re z + i\Im z)(\Re z' + i\Im z')} = \overline{(\Re z \Re z' - \Im z \Im z') - i(\Re z \Im z' + \Re z' \Im z)}$$

$$\forall (z, z') \in H^2, \overline{zz'} = (\Re z - i\Im z)(\Re z' - i\Im z') = (\Re z \Re z' + \Im z \Im z') - i(\Re z \Im z' + \Re z' \Im z)$$

Ainsi : $\forall (z, z') \in H^2, \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$. La conjugaison est un automorphisme d'anneau.

On pose $\forall z \in H, \varphi(z) = z\bar{z} = (\Re z + i\Im z)(\Re z - i\Im z) = \Re^2 z - \Im^2 z \in \mathbb{R}$. (On ne peut pas définir le module comme la racine carrée de cette expression, qui n'est pas toujours positive). On a : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \varphi(\lambda) = \lambda^2$, $\varphi(\pm 1) = 1$, $\varphi(\pm i) = -1$, $\varphi(0) = 0$ et de plus :

$$\forall (z, z') \in H^2, \varphi(zz') = zz'\overline{zz'} = zz'\bar{z}\bar{z}' = z\bar{z} \times z'\bar{z}' = \varphi(z)\varphi(z')$$

Si $\varphi(z) = \Re^2 z - \Im^2 z = 0$, alors $\forall z' \in H, \varphi(zz') = \varphi(z)\varphi(z') = 0 \neq 1 = \varphi(1)$. Ainsi les nombres vérifiant $\Re^2 z - \Im^2 z = 0$ ne sont pas inversibles.

Pour les mêmes raisons, ces nombres forment d'ailleurs un idéal, qu'on notera $I = \{z \in H, \varphi(z) = 0\}$. On a bien montré que si $\varphi(z) = 0$, alors $\forall z' \in H, \varphi(zz') = 0$, c'est-à-dire $\forall (z, z') \in I \times H, zz' \in I$.

$$\forall (a, b) \in H^2, \varphi(a+b) = \Re^2(a+b) - \Im^2(a+b) = \Re^2 a - \Im^2 a + \Re^2 b - \Im^2 b + 2(\Re a \Re b - \Im a \Im b)$$

Ainsi $\forall (a, b) \in H^2, \varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b) + 2\Re(a\bar{b})$, ce qui nous fournit un analogue de la formule d'Al-Kashi.

Une propriété qui nous sera utile par la suite nous permet d'une certaine manière de «normaliser» les nombres :

$$\forall z \in H - I, \varphi\left(\frac{z}{\sqrt{|\varphi(z)|}}\right) = \frac{\varphi(z)}{\varphi(\sqrt{|\varphi(z)|})} = \frac{\varphi(z)}{\sqrt{|\varphi(z)|}^2} = \frac{\varphi(z)}{|\varphi(z)|} = \text{sign}(\varphi(z))$$

IV. Trigonométrie hyperbolique

On a $i^2 = (0+1i)^2 = (0^2+1^2) + i(0+0) = 1$ donc par récurrence: $\forall n \in \mathbb{Z}, (i^{2n} = 1) \wedge (i^{2n+1} = i)$.

$$\text{Il vient donc : } \forall x \in \mathbb{R}, e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = \sum_{k=0, k \text{ pair}}^{\infty} \frac{x^k}{k!} + i \sum_{k=0, k \text{ impair}}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \cosh(x) + i \sinh(x)$$

Ainsi, les nombres définis précédemment remplissent leurs rôles. Cela nous permet d'obtenir des formules analogues à celles d'Euler.

Soit a et b deux réels.

$$e^{i(a+b)} = (\cosh(a+b) + i \sinh(a+b)) = [\cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b] + i[\sinh a \cosh b + \sinh b \cosh a]$$

$$e^{ia} e^{ib} = (\cosh a + i \sinh a)(\cosh b + i \sinh b) = (\cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b) + i(\cosh a \sinh b + \sinh a \cosh b)$$

Ainsi, $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, e^{i(a+b)} = e^{ia} e^{ib}$. L'exponentielle dans \mathbf{H} est un morphisme.

Étant connues les propriétés des fonctions cosinus et sinus hyperboliques, des propriétés naturelles surgissent :

- En appliquant n fois la formule précédente, on obtient $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, (e^{ix})^n = e^{inx}$
- Il vient également : $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-ix} = \cosh x - i \sinh x = \cosh(-x) + i \sinh(-x) = e^{-ix}$.
- On a : $\cosh x = \Re(e^{ix}) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ et $\sinh x = \Im(e^{ix}) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(\pm e^{ix}) = (\pm \cosh x)^2 - (\pm \sinh x)^2 = \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ («hyperbole unité»)
- L'unicité de la forme algébrique (partie réelle et imaginaire) et la commutativité de l'anneau font qu'on peut appliquer la formule du binôme de Newton ou la somme des termes d'une suite géométrique sur des expressions avec des exponentielles « hyperboliques » pour en déduire des formules de trigonométrie hyperbolique (même si on peut tout aussi simplement utiliser la définition du cosinus et du sinus hyperboliques).

V. Représentation exponentielle, existence et unicité

L'ensemble des points (x, y) vérifiant : $\exists \lambda \in \mathbb{R}, x = \cosh \lambda \wedge y = \sinh \lambda$ est une branche d'hyperbole. Ainsi, l'exponentielle d'un « imaginaire pur » est l'affixe d'un point de cette hyperbole, et tout point de la branche d'hyperbole correspond réciproquement à l'exponentielle d'un unique imaginaire pur.

- On a : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(\pm e^{ix}) = 1$. On pourrait se demander si, réciproquement, on peut écrire tout antécédent de 1 comme une exponentielle. La réponse est oui. En effet, soit z un nombre de \mathbf{H} vérifiant $\Re^2 z - \Im^2 z = 1$. Si $\Re z \geq 0$, il est assez facile en posant $\theta = \operatorname{arsinh}(\Im z)$ et d'après la relation $\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1$ de se convaincre qu'on a $\Im z = \sinh \theta$ et $\Re z = \sqrt{1 + \Im^2 z} = \cosh \theta$ soit $z = e^{i\theta} = e^{i \operatorname{arsinh}(\Im z)}$. Si au contraire $\Re z \leq 0$, on n'a qu'à remarquer que $-z$ vérifie les conditions précédentes et qu'alors $z = -(-z) = -e^{i \operatorname{arsinh}(\Im(-z))} = -e^{-i \operatorname{arsinh}(\Im z)}$.
- Si z est un nombre de \mathbf{H} vérifiant $\varphi(z) > 0$, il est relativement aisé, en s'aidant de la formule $\varphi\left(\frac{z}{\sqrt{|\varphi(z)|}}\right) = \operatorname{sign}(\varphi(z))$ de revenir au cas précédent (on divise par la racine carrée du nombre positif $\varphi(z)$), et on en déduit : $\forall z \in H, (\varphi(z) > 0) \Rightarrow (\exists \alpha \in \mathbb{R}, \exists \theta \in \mathbb{R}, z = \alpha e^{i\theta})$.
- Si en revanche on a $\varphi(z) < 0$, alors il faut remarquer que $\varphi(z/i) = \varphi(i z) = -\varphi(z)$ et que z/i vérifie donc les conditions de la formule précédente. Ainsi : $\forall z \in H, (\varphi(z) < 0) \Rightarrow (\exists \alpha \in \mathbb{R}, \exists \theta \in \mathbb{R}, z = i \alpha e^{i\theta})$.

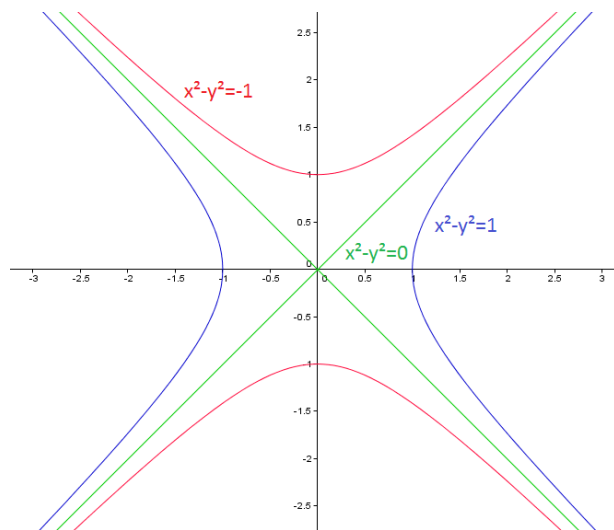
On en déduit la formule générale : $\forall z \in H - I, \exists \epsilon \in \{1, i\}, \exists \alpha \in \mathbb{R}, \exists \theta \in \mathbb{R}, z = \epsilon \alpha e^{i\theta}$. Notons que la preuve est constructive et qu'on peut toujours écrire la forme exponentielle avec une expression utilisant la fonction *arsinh*. La décomposition obtenue est en outre unique du fait de la bijectivité de *sinh*. Notons que contrairement aux complexes usuels, la fonction exponentielle est ici injective (toujours à cause de l'injectivité de *sinh*).

Cas des éléments non inversibles et interprétation géométrique:

Pour ce qui est de 0, la propriété est trivialement vraie (il suffit de prendre $\alpha = 0$), mais la décomposition obtenue n'est pas unique.

Si i est non inversible et non nul, alors $\varphi(z) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in \mathbb{R}^*, \varphi(\pm \lambda e^{ix}) = \lambda^2$ et $\varphi(\pm i \lambda e^{ix}) = -\lambda^2$. Ainsi le seul λ pouvant convenir serait 0 mais $\pm(i)0 e^{ix} = 0$ et $0 \neq i$ par hypothèse. Il n'existe donc pas de décomposition similaire aux cas précédents.

Cette impossibilité a d'ailleurs une explication géométrique : pour les autres nombres, on avait quatre « formes » de base : e^{ix} , $i e^{ix}$, $-e^{ix}$ et $-i e^{ix}$. Ces quatre formes correspondent à quatre branches d'hyperbole, orientées respectivement vers la droite, le haut, la gauche et le bas, et à partir desquelles on peut atteindre n'importe quel point (correspondant à un nombre inversible) en leur appliquant une homothétie de centre l'origine. Ces quatre branches d'hyperboles admettent toutes comme asymptotes les droites d'équation $y=x$ et $y=-x$, soit l'ensemble des points tels que $x^2-y^2=0$ (une hyperbole dégénérée, en quelque sorte). Ces points-là, dont les affixes sont précisément les nombres non inversibles, ne sont donc jamais atteints par aucune des hyperboles (y compris après application d'une homothétie).



VI. Problèmes relatifs à la factorisation des polynômes et racines carrées

Des égalités comme $(x - i)(x + i) = (x^2 - i^2) = (x^2 - 1) = (x - 1)(x + 1)$ montrent que la décomposition des polynômes à coefficients dans \mathbf{H} n'est pas unique. En outre -1 n'a pas de racine carrée dans \mathbf{H} donc le polynôme x^2+1 est irréductible. Le théorème fondamental de l'algèbre ne connaît donc pas du tout d'équivalent dans \mathbf{H} . Tandis que 1 a quatre racines carrées (1, -1, i , $-i$), ni -1 ni i n'en ont ne serait-ce qu'une seule.

À l'aide des formules $\varphi(z^2) = \varphi(z)^2$ et $(e^{ix})^2 = e^{2ix}$ ainsi que de la décomposition sous forme exponentielle, on remarque que si -1 et i avaient des racines carrées, alors tous les nombres inversibles en auraient aussi. On est alors tentés, pour que -1 admette une racine carrée, d'admettre des complexes comme coefficients. En travaillant dans $\mathbf{C} + i\mathbf{C}$ (un espace de dimension 4, dont $(1, i, i, ii)$ est une base et dans lequel on a $\forall x \in \mathbb{R}, e^{ix} = \cos x + i \sin x$), on remarque que -1 et i possèdent chacun quatre racines carrées. En effet : $\left(\frac{1}{2}(1+i) + \frac{1}{2}(1-i)i\right)^2 = i$, $i^2 = -1$ et la multiplication par $\pm i$ ou ± 1 ne change rien au carré. Tous les nombres (inversibles comme non-inversibles) de \mathbf{H} possèdent au moins une racine carrée dans $\mathbf{C} + i\mathbf{C}$. On pourrait se demander s'il en va de même des nombres de $\mathbf{C} + i\mathbf{C}$.

VII. Les éléments non-inversibles et les diviseurs de zéro

On a déjà vu que \mathbf{I} , l'ensemble (infini) des éléments non-inversibles, était un idéal de

H. En tant que tel, **I** est stable multiplicativement. En revanche, la multiplication dans **I** n'admet pas d'élément neutre (on aurait sinon un élément neutre non-inversible...). Les éléments $x+\iota y$ de **I** sont tels que $x = \pm y$, ils sont donc de la forme $\lambda(1\pm\iota)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Intéressons-nous d'abord à l'ensemble des éléments non-inversibles tels que $x = y$, qu'on notera **I**₁. **I**₁ est stable additivement et multiplicativement et, en tant que sous-ensemble de **H**, possède toutes les propriétés de commutativité, associativité et distributivité qu'on attend de lui. (**I**₁, +, ×) est donc un pseudo-anneau commutatif.

On a : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a(1+\iota)b(1+\iota) = ab(1^2+2\iota+\iota^2) = ab(2+2\iota) = 2ab(1+\iota)$.

En particulier, $\forall a \in \mathbb{R}, (a+\iota a)^2 = 2a^2(1+\iota)$. On peut alors trouver certaines racines carrées. La formule précédente donne en effet: $\forall a \in \mathbb{R}^+, (a+\iota a) = (\pm\sqrt{a/2}(1+\iota))^2$. Multiplier les racines carrées obtenues par ι ne permet pas d'en trouver d'autres, car $\iota(1+\iota) = (1+\iota)$.

Par exemple, les racines carrées de $1+\iota$ sont $\frac{\sqrt{2}}{2} + \iota \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{-\sqrt{2}}{2} - \iota \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Remarquons que si $a = \frac{1}{2}$, alors on obtient : $\left(\frac{1}{2}(1+\iota)\right)^2 = \frac{2}{4}(1+\iota) = \frac{1}{2}(1+\iota)$.

Regardons maintenant l'ensemble des éléments non-inversibles tels que $x = -y$, qu'on appellera **I**₂. **I**₂ a les mêmes propriétés que **I**₁ car ses éléments sont les conjugués de ceux de **I**₁. (**I**₂, +, ×) est donc également un pseudo-anneau commutatif.

On a de même : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a(1-\iota)b(1-\iota) = ab(2-2\iota) = 2ab(1-\iota)$. On en déduit également certaines racines carrées, car : $\forall a \in \mathbb{R}^+, (a-\iota a) = (\pm\sqrt{a/2}(1-\iota))^2$. Par exemple, les racines carrées de $1-\iota$ sont $\frac{\sqrt{2}}{2} - \iota \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{-\sqrt{2}}{2} + \iota \frac{\sqrt{2}}{2}$.

De même : $\left(\frac{1}{2}(1-\iota)\right)^2 = \frac{1}{2}(1-\iota)$.

Le seul cas qu'il nous reste à traiter est le produit d'éléments de **I**₁ et de **I**₂.

On a : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a(1+\iota) \times b(1-\iota) = (ab)(1-\iota^2) = 0$. Le produit d'un élément de **I**₁ et d'un de **I**₂ est donc nul. On constate ainsi l'existence d'un nombre infini de diviseurs de zéro (ce sont en fait les seuls, comme on le prouve en utilisant la fonction φ).

ANNEXE : Pistes pour le calcul sur ordinateur

- Si on veut effectuer des calculs sur ces nombres à la machine, on peut remarquer que : $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac+bd & ad+bc \\ ad+bc & ac+bd \end{pmatrix}$ et qu'il existe donc un isomorphisme d'anneau entre **H** et de telles matrices (l'addition, la multiplication, l'exponentielle coïncident et le déterminant des matrices donne l'image par φ des nombres correspondants). Cela est particulièrement utile pour les logiciels de calcul formel. Une calculatrice comme la TI-89 supportant l'extraction de racines carrées de matrices pourra aussi donner des résultats intéressants sur les racines carrées dans **H**.

- Si on a accès à un langage de programmation spécifique, on peut développer une classe (pour peu que le langage soit orienté objet) pour le calcul des « complexes hyperboliques », ou simplement implémenter leur multiplication comme une fonction sur les nombres complexes standards. Il n'y a rien à changer à l'addition, à la conjugaison etc... qui sont identiques aux opérations sur les nombres complexes.

Par exemple en Python :

```
import math
def hMult(a,b):
    return (a.real*b.real+a.imag*b.imag)+1j*(a.real*b.imag+a.imag*b.real)
def hPhi(a):
    return a.real**2-a.imag**2
def hPower(a,n):
    if n==0:
        return 1
    else:
        return hMult(a,hPower(a,n-1))
def hExp(a):
    return math.exp(a.real)*(math.cosh(a.imag)+1j*math.sinh(a.imag))
```